

27

LINHA DE POSIÇÃO ASTRONÔMICA OU RETA DE ALTURA

27.1 CONCEITO DE LDP ASTRONÔMICA

Os métodos de determinação de coordenadas geográficas expostos nos Capítulos 25 e 26 limitam-se à observação de astros em casos particulares. No Capítulo 25, estudou-se a observação de astros na **passagem meridiana**, para cálculo da **Latitude** do observador. No Capítulo 26, foi abordada a observação de astros em circunstâncias favoráveis para determinação da **Longitude** no mar (por meio do cálculo ou pela plotagem da **reta de Longitude**). Ambos tratam de determinações isoladas, obtendo-se, respectivamente, uma reta de posição paralela ao Equador (quando se calcula a Latitude), ou paralela aos meridianos (quando se determina a Longitude).

O objetivo deste Capítulo é explicar o conceito de que a observação de um astro em uma posição qualquer determina uma **circunferência de igual altura** (ou circunferência de posição), em torno do **ponto subastral (PSA)** ou **ponto subestelar** (posição geográfica do astro (GP), no instante da observação), que constituirá uma linha de posição (LDP) do navio, no referido instante.

Este é um entendimento crucial para o estudo da Navegação Astronômica. É necessário que se compreenda perfeitamente o **conceito de linha de posição astronômica** ou **reta de altura**, para que se saiba realmente o que se está fazendo, ao observar um astro, calcular os elementos determinativos da reta de altura e traçá-la na carta ou folha de plotagem.

Antes de prosseguir, vale recordar o conceito de linha de posição (LDP):

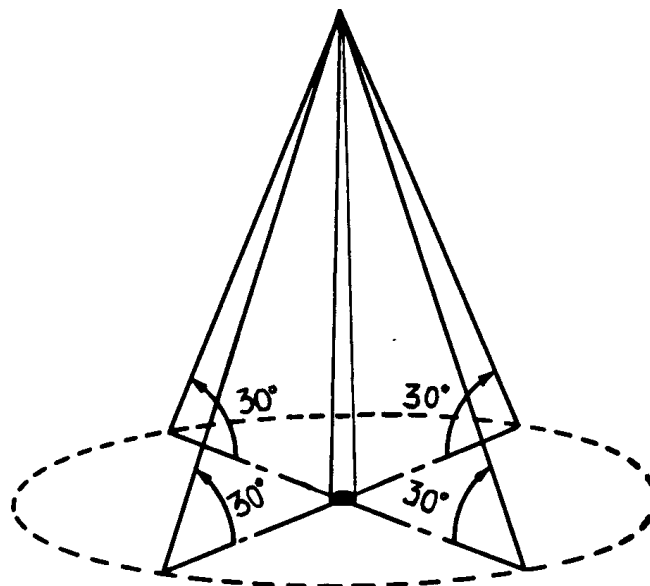
É O LUGAR GEOMÉTRICO DE TODAS AS POSIÇÕES QUE O NAVIO PODE OCUPAR, TENDO EFETUADO UMA CERTA OBSERVAÇÃO, EM UM DETERMINADO INSTANTE.

Assim, a **LDP astronômica** representa o lugar geométrico de todas as posições que o navio pode ocupar, tendo efetuado a observação da altura de um astro, em um determinado instante.

27.2 CIRCUNFERÊNCIA DE IGUAL ALTURA (CIRCUNFERÊNCIA DE ALTURAS IGUAIS OU CIRCUNFERÊNCIA DE POSIÇÃO)

Suponhamos um mastro ou poste exatamente vertical, perpendicular a uma superfície plana e nivelada (figura 27.1), e que um fio (ou cabo) foi esticado do seu tope até a superfície abaixo, de modo que o ângulo formado pelo fio (ou cabo) e a superfície seja de 30° .

Figura 27.1 - Circunferência de Igual Altura



CIRCUNFERÊNCIA DE IGUAL ALTURA EM TORNO DE UM MASTRO

Em qualquer ponto da circunferência, o ângulo entre o tope do mastro e a superfície plana será de 30° . Esta circunferência é denominada **CIRCUNFERÊNCIA DE IGUAL ALTURA**.

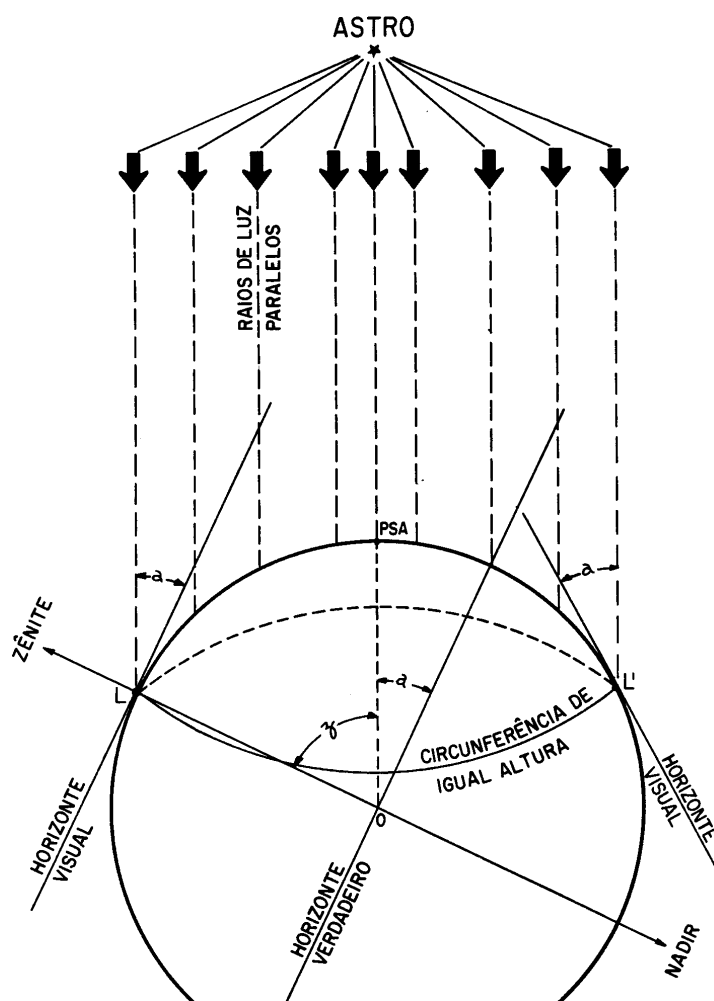
Se o fio for girado em torno da base do mastro, a figura descrita será uma circunferência e, de qualquer ponto desta, o ângulo entre o tope do mastro e a superfície será de 30° , como se pode verificar na figura 27.1.

Esta circunferência é denominada **circunferência de igual altura**. Outros nomes também adotados são: **circunferência de posição** ou, simplesmente, **circunferência de altura**. Todos são adaptações da expressão em inglês “**circle of equal altitude**”.

Como exemplo prático, imaginemos que um observador se posicione próximo de um mastro vertical, portando um sextante, e busque um ponto onde o ângulo vertical entre o tope e a base do mastro seja de 30° . Se for medida a distância deste ponto ao pé do mastro e traçada em torno do mastro uma circunferência tendo essa distância como raio, de qualquer ponto de tal circunferência o ângulo vertical entre o tope e a base do referido mastro será de 30° . Assim, ter-se-á traçado em torno do mastro a **circunferência de igual altura de 30°** , mostrada na figura 27.1.

Agora, suponhamos que o tope do mastro (ou poste) foi estendido até uma distância infinita da base e que existe um astro no tope do mastro. Os raios de luz provenientes do astro, situado a uma distância infinita da superfície, serão praticamente paralelos uns aos outros (figura 27.2). Como a superfície abaixo é a **superfície da Terra**, aproximadamente **esférica**, as medidas dos ângulos verticais de incidência dos raios são feitas em relação a um plano tangente à superfície da esfera terrestre, isto é, o **horizonte visual**.

Figura 27.2 – Circunferência de Igual Altura (na Superfície da Terra)



Então, o ângulo vertical varia de 90° , na base do mastro (**ponto subastral**, **ponto subestelar** ou **posição geográfica do astro**), até 00° (zero), em todos os pontos da superfície da esfera terrestre situados a 90° da base.

O **ponto subastral (PSA)**, **ponto subestelar** ou **posição geográfica (GP)** de um astro representa a sua projeção sobre a superfície da esfera terrestre. O **ponto subastral** pode ser localizado na superfície da Terra por suas **coordenadas geográficas**, sendo que a **Latitude** coincide com a **Declinação** do astro e a **Longitude** com o **ângulo no pólo em Greenwich** do astro, no instante da observação. Como se sabe, o ângulo no pólo em Greenwich do astro (t_1G) é igual ao Ângulo Horário em Greenwich (AHG ou tG) com o astro a Oeste e igual a $360^\circ - \text{AHG}$, com o astro a Leste.

Assim, a **circunferência de igual altura** é uma circunferência na superfície da Terra, centrada na **posição geográfica** do astro, isto é, no **ponto subastral** (ou **ponto subestelar**), de onde se observa o astro sob a mesma altura.

Como o astro é considerado estar a uma distância infinita da Terra, sendo seus raios luminosos paralelos entre si, o ângulo vertical medido na superfície da Terra é igual ao ângulo medido no centro da Terra. Este ângulo é a **altura verdadeira (a)** do astro, isto é, sua distância angular acima do **horizonte verdadeiro**, conforme indicado na figura 27.2.

A distância angular do **horizonte verdadeiro** ao Zênite de um determinado local é sempre 90° . A distância angular do **horizonte verdadeiro** ao **ponto subastral** (**posição geográfica** do astro) é igual à **altura verdadeira (a)** do astro, como pode ser verificado na figura 27.2. O seu complemento, isto é, $90^\circ - a$, ou seja, a **distância zenital (z)** do astro, é o raio da **circunferência de igual altura**.

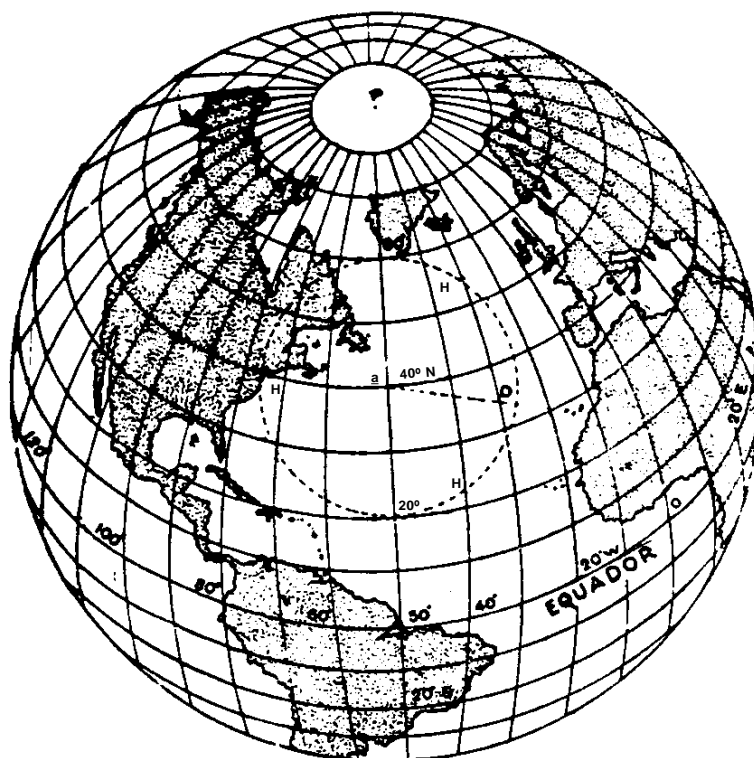
Desta forma, ao observarmos um astro com o sextante num determinado instante, obtendo, após as correções, sua **altura verdadeira (a)**, estamos, na realidade, definindo uma **linha de posição (LDP)** constituída por uma **circunferência de igual altura**, com centro na **posição geográfica** do astro (**ponto subastral**) e raio igual à **distância zenital do astro** ($z = 90^\circ - a$) naquele instante.

A **distância zenital (z)** é medida ao longo de um círculo máximo (o círculo máximo da esfera terrestre entre a posição do observador e o ponto subastral, isto é, a projeção na superfície da Terra do vertical do astro). Então, o raio da circunferência de igual altura pode ser expresso em milhas náuticas, sendo 1' de arco igual a 1 milha.

Desta forma, no exemplo apresentado inicialmente, $a = 30^\circ$; então, $z = 90^\circ - a = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Assim, $z = 60 \times 60 = 3.600$ milhas náuticas. Daí, quando observamos um astro na **altura verdadeira** de 30° , estamos, na realidade, definindo uma **linha de posição (LDP)** constituída por uma **circunferência de igual altura** centrada na **posição geográfica** do astro (**ponto subastral**) e de raio igual a $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ou 3.600 milhas náuticas.

Como se conhecem as coordenadas da **posição geográfica** do astro (**ponto subastral**) no instante da observação (AHG e Dec), pode-se plotar o **ponto subastral** em um globo terrestre e traçar, com um compasso de pontas curvas, a **circunferência de igual altura**, com centro no **ponto subastral** e raio igual à **distância zenital verdadeira** do astro, conforme mostrado na figura 27.3. Esta **circunferência de igual altura** seria sua **linha de posição astronômica**, representando o lugar geométrico dos pontos da superfície da Terra sobre o qual estaria localizada sua posição.

Figura 27.3 - Circunferência de Igual Altura (LDP Astronômica)



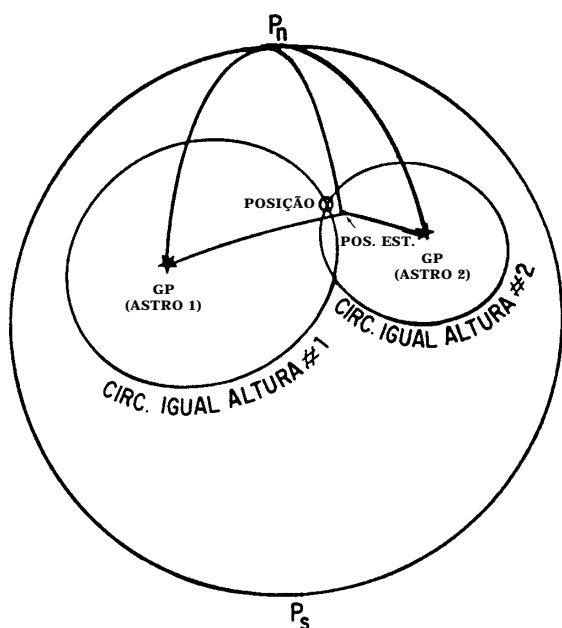
Na figura 27.3 é mostrada a **circunferência de posição** traçada com o **ponto subastral** de um astro, em um determinado instante, localizado na **Latitude** de 40°N e **Longitude** de 050°W e raio de 20° (1.200 milhas). Neste instante, todos os observadores situados sobre a circunferência traçada mediriam a altura de 70° para o astro visado ($a = 90^\circ - z = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$). Todos os observadores que se acham no interior da citada circunferência medem, no momento considerado, alturas maiores que 70°; um observador localizado exatamente no **ponto subastral** (na figura 27.3 designado por a) tem o astro no Zênite e registra a altura de 90°. Os observadores localizados fora da circunferência, medem alturas menores que 70° e os que se acham sobre uma circunferência equidistante 90° do **ponto subastral** observam uma altura igual a 0° (astro no horizonte).

Observando dois astros e traçando as **circunferências de alturas iguais** em torno dos respectivos **pontos subastrais**, as duas circunferências vão, normalmente, cruzar-se em dois pontos e a posição do observador estará em uma das interseções, provavelmente a mais próxima da **posição estimada** do navio no instante da observação, como mostrado na figura 27.4.

Se os dois pontos de interseção das **circunferências de alturas iguais** estivessem tão próximos que pudessem causar confusão ou ambigüidade na posição astronômica, a dúvida poderia ser resolvida pela observação de um terceiro astro e o traçado de uma terceira circunferência de alturas iguais.

Embora o método acima descrito, isto é, a solução geométrica do problema, seja de fácil compreensão, não é prático para uso a bordo, pois, para obter a posição astronômica com a precisão exigida, seria necessário um globo terrestre de dimensões muito grandes.

Figura 27.4 - Posição Astronômica (Interseção das Circunferências de Alturas Iguais)



AS CIRCUNFERÊNCIAS DE ALTURAS IGUAIS SÃO CENTRADAS NOS PONTOS SUBASTRAIS (POSICÕES GEOGRÁFICAS) DOS ASTROS OBSERVADOS E SEUS RAIOS SÃO IGUAIS ÀS DISTÂNCIAS ZENITAIS DOS ASTROS, EXPRESSAS EM MILHAS NÁUTICAS.

A POSIÇÃO ASTRONÔMICA ESTARÁ EM UMA DAS INTERSEÇÕES DAS CIRCUNFERÊNCIAS DE ALTURAS IGUAIS (NORMALMENTE NA MAIS PRÓXIMA DA POSIÇÃO ESTIMADA DO OBSERVADOR). SE OCORRE AMBIGÜIDADE, A DÚVIDA PODE SER SOLUCIONADA PELA OBSERVAÇÃO DE UM TERCEIRO ASTRO E O TRAÇADO DE UMA TERCEIRA CIRCUNFERÊNCIA DE IGUAL ALTURA.

Suponhamos, por exemplo, que foram observados 3 astros, para determinação de uma posição astronômica, sendo obtidas as seguintes **alturas verdadeiras**:

ALTURAS	RAIOS DAS CIRCUNFERÊNCIAS DE ALTURAS IGUAIS	
$a_1 = 30^\circ$	$z_1 = 60^\circ$	$z_1 = 3.600$ milhas
$a_2 = 60^\circ$	$z_2 = 30^\circ$	$z_2 = 1.800$ milhas
$a_3 = 40^\circ$	$z_3 = 50^\circ$	$z_3 = 3.000$ milhas

Para traçar as **circunferências de alturas iguais** com os raios z_1 , z_2 e z_3 , a fim de obter a **posição astronômica** com precisão, seria necessário dispor de um globo terrestre de tamanho impraticável para emprego a bordo de um navio.

Como exemplo, é oportuno citar que, para se obter o ponto com erro menor que 1 milha, seria preciso dispor de um globo com um diâmetro aproximado de 7 metros. A solução geométrica, portanto, torna-se inviável para uso na Navegação Astronômica. Este método só seria prático para astros com alturas iguais ou superiores a 87° , pois, nesta situação, $a = 87^\circ$ e $z = 90^\circ - a = 90^\circ - 87^\circ = 3^\circ = 180$ milhas, o que seria uma distância razoável para ser usada como raio das circunferências de posição, a serem traçadas em uma carta de pequena escala. Entretanto, como vimos, normalmente não se observam astros com alturas maiores que 65° ou 70° , pela dificuldade de definir o vertical do astro, no qual deve ser feita a observação.

A solução analítica, que consiste na resolução de um sistema de duas equações com duas incógnitas (que são a **Latitude** e a **Longitude** do observador), sendo longa e complicada (ver o Apêndice a este Capítulo), também não era usada na prática corrente da navegação até a introdução dos computadores e calculadoras eletrônicas. Atualmente, mesmo dispondo destes auxílios, em geral adota-se, ainda, para cálculo das **retas de altura** e determinação da **posição astronômica**, uma combinação da solução analítica com uma solução gráfica sobre a Carta Náutica (ou folha de plotagem), conforme mostrado a seguir.

27.3 REPRESENTAÇÃO DAS CIRCUNFERÊNCIAS DE ALTURAS IGUAIS SOBRE UMA CARTA DE MERCATOR. CIRCUNFERÊNCIA OSCULATRIZ

As **circunferências de alturas iguais** na superfície da esfera terrestre são representadas por curvas complexas quando transportadas para uma Carta de Mercator (ou folha de plotagem construída neste sistema de projeção), como mostrado na figura 27.5. Tais curvas são denominadas **curvas de alturas iguais** ou **curvas de posição** e podem assumir as formas de elipse, parábola ou de uma curva sinusoidal, conforme o pólo terrestre mais próximo do **ponto subastral** se situe, respectivamente, fora da circunferência de posição, sobre tal circunferência ou no seu interior, como apresentado na figura 27.6, que exemplifica o traçado das três espécies de **curvas de alturas iguais** na Carta de Mercator (ver maiores detalhes no Apêndice a este Capítulo).

Figura 27.5 - Circunferência de Alturas Iguais Traçada em uma Carta de Mercator

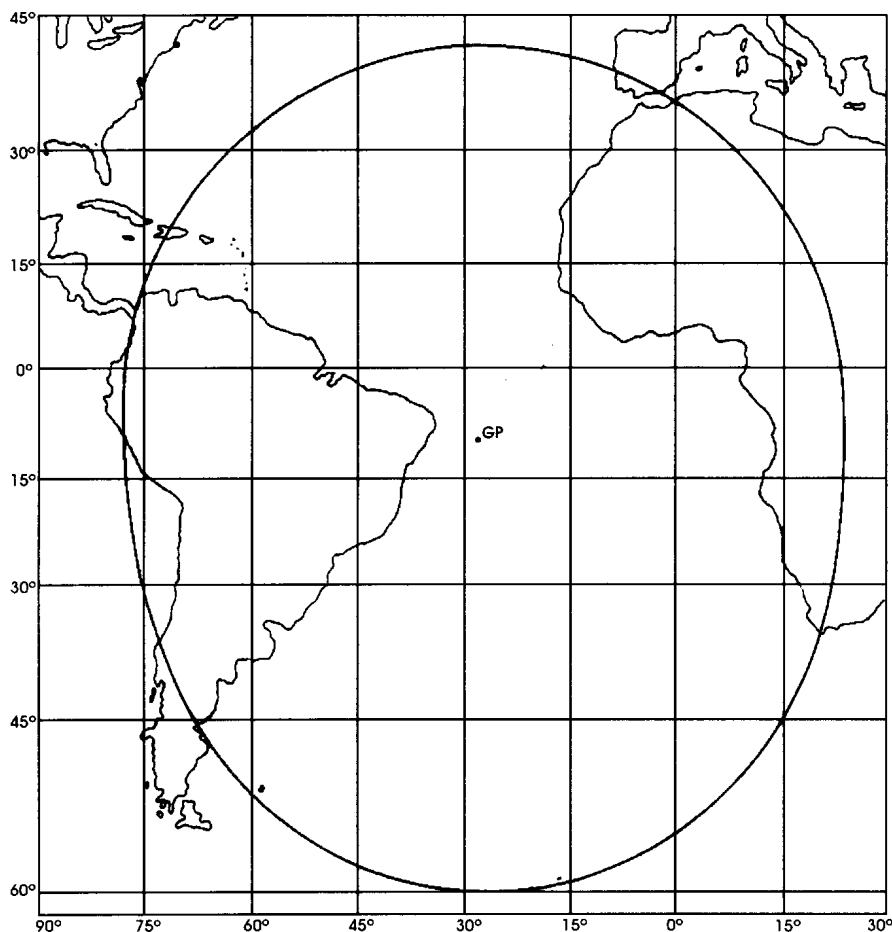
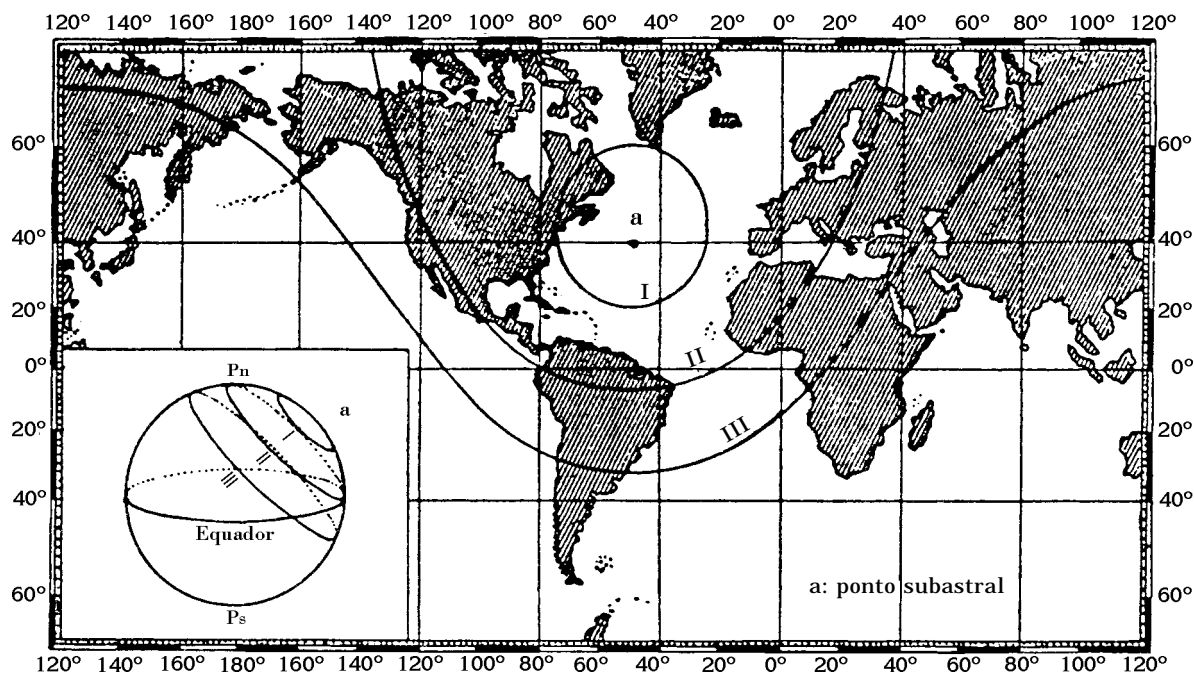


Figura 27.6 - Curvas de Altura Plotadas em uma Carta de Mercator

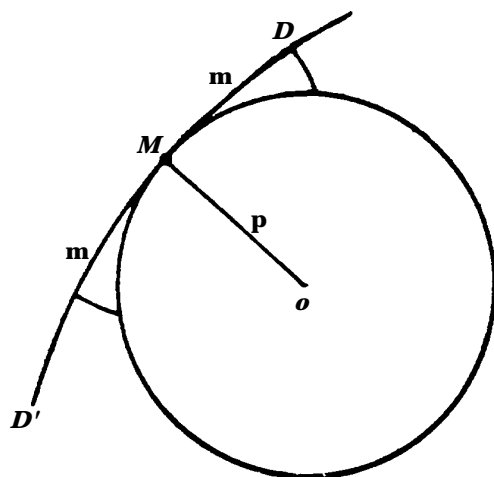


- I - PÓLO FORA DA CIRCUNFERÊNCIA DE POSIÇÃO (CURVA DE ALTURA: ELIPSE)
- II - PÓLO SOBRE A CIRCUNFERÊNCIA DE POSIÇÃO (CURVA DE ALTURA: PARÁBOLA)
- III - PÓLO NO INTERIOR DA CIRCUNFERÊNCIA DE POSIÇÃO (CURVA DE ALTURA: SINUSÓIDE)

Dada a complexidade das **curvas de alturas iguais**, verificou-se a possibilidade de substituí-las, em um pequeno trecho, por um arco de circunferência com o mesmo raio de curvatura que a curva de altura, no referido trecho.

Assim, denomina-se **circunferência oscultriz** a uma curva, num ponto dado, à circunferência tangente à curva no referido ponto, que tenha o mesmo raio de curvatura que a curva, no ponto considerado (ver a figura 27.7).

Figura 27.7 - Circunferência Oscultriz



Pode ser demonstrado que a distância entre a **curva de alturas iguais** traçada na Carta de Mercator e a **circunferência oscultriz** corresponderá somente a 0,1', para uma distância (m) de 152 milhas náuticas do ponto de tangência (M), na Latitude de 60°. Para Latitudes e alturas menores que 60°, demonstra-se que a **circunferência oscultriz** de uma **curva de alturas iguais**, em um ponto qualquer da curva, pode substituí-la em uma grande extensão (cerca de 400 milhas para cada lado do ponto de tangência),

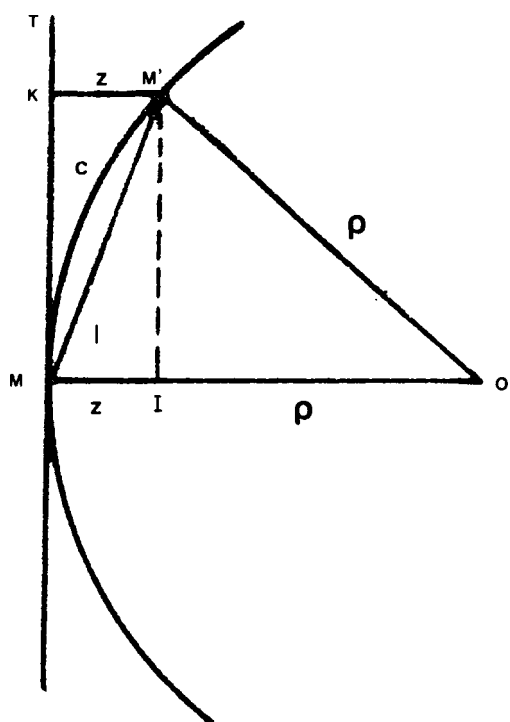
sem que as duas se afastem mais de $0,5'$ (exceto para os casos em que a curva de posição é sinusóide). Assim, pode-se substituir, sem erro sensível, a **curva de alturas iguais** pela **circunferência oscultriz**.

27.4 SUBSTITUIÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA OSCULTRIZ PELA TANGENTE. A RETA DE ALTURA

a. A RETA DE ALTURA

Normalmente, o **ponto subastral (PSA)**, **ponto subestelar** ou **posição geográfica (GP)** do astro está muito distante da posição do observador e, então, torna-se possível, dentro de certos limites, substituir a **circunferência oscultriz** pela sua **tangente**.

Figura 27.8 - Substituição da Circunferência Oscultriz pela Tangente (Reta de Altura)



Seja, na figura 27.8, uma seção da circunferência oscultriz à curva de alturas iguais em M . Pode ser demonstrado matematicamente que a substituição da circunferência oscultriz pela tangente MT é válida, respectivamente, na extensão de 100 milhas para cada lado do ponto de tangência M , para alturas da ordem de 35° ; 50 milhas para cada lado, para alturas de 70° ; e 30 milhas, para alturas de 80° (raramente observadas, exceto na passagem meridiana do Sol).

Assim, a circunferência pode ser substituída por uma linha reta, perpendicular ao raio no ponto de tangência, que estará próximo da posição estimada do observador. Esta tangente de altura, nas proximidades da posição estimada, é denominada **reta de altura** e representa o lugar geométrico das posições do navio, quando se efetua a observação da altura de um astro, em um determinado instante.

b. ORIENTAÇÃO DA RETA DE ALTURA

Como vimos, são os seguintes os elementos do **triângulo de posição** (ou **triângulo esférico de posição**) na Esfera Celeste:

– VÉRTICES: Pólo Elevado Celeste (P_n ou P_s)

Astro observado (M)

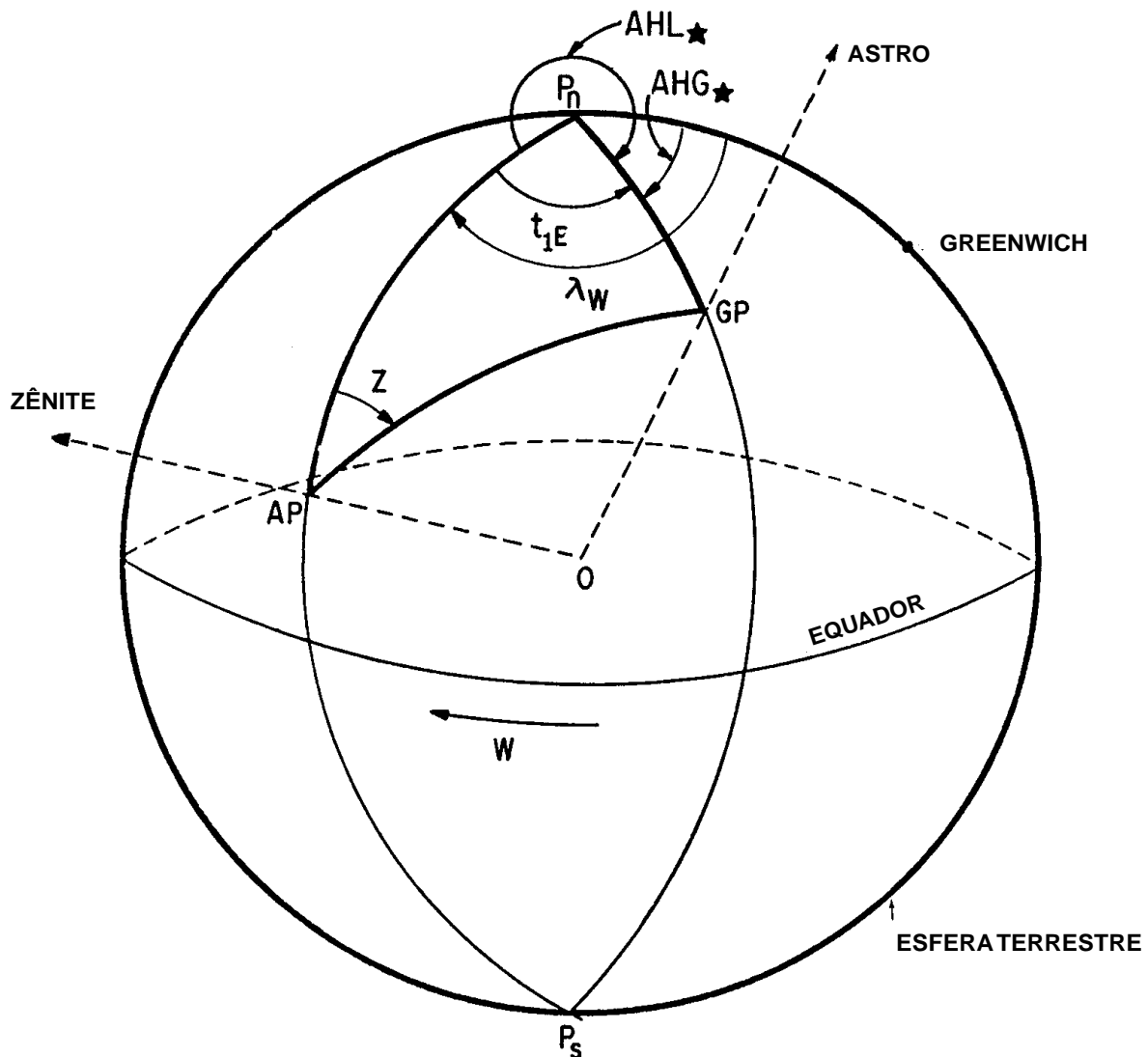
Zênite da posição estimada (ou assumida) do observador (Z)

- LADOS: Distância polar do astro (p)
Distância zenital do astro (z)
Colatitude (c)
- ÂNGULOS: Ângulo no pólo (t_1)
Ângulo no Zênite (Z)
Ângulo paralático (A_p)

Quando se projeta o **triângulo de posição** da **Esfera Celeste** para a **Esfera Terrestre**, seus vértices tornam-se, então (ver a figura 27.9):

- Pólo elevado terrestre (P_n ou P_s)
- Posição estimada (ou assumida) do observador (AP)
- Ponto subastral (PSA) ou posição geográfica do astro observado (GP)

Figura 27.9 - Triângulo de Posição Projetado na Esfera Terrestre



Já vimos que, para resolver o **triângulo de posição**, é necessário conhecer **2** lados e o ângulo formado entre eles. Ademais, conforme mencionado, resolve-se o triângulo assumindo-se uma posição (geralmente a posição estimada do observador no instante de medição da altura do astro). Assim, tornam-se conhecidos os seguintes elementos do **triângulo de posição**:

- Colatitude ($c = 90^\circ - \varphi_e$)
- Distância Polar do Astro ($p = 90^\circ \pm \text{Dec}^*$)
- Ângulo no Pólo do Astro ($t_1W = \text{AHL}^*$ ou $t_1E = 360^\circ - \text{AHL}^*$)

Desta forma, conhecem-se **2** lados (colatitude e distância polar) e o ângulo formado entre eles (ângulo no pólo). Pode-se, então, calcular os 2 outros elementos do triângulo que nos interessam:

- Ângulo no Zênite (Z)
- Distância Zenital (z)

Com estes elementos, obtêm-se o **Azimute Verdadeiro (Az)** do astro (a partir do Ângulo no Zênite) e a **altura calculada (ae)** do astro (a partir da distância zenital).

A figura 27.10 mostra o **triângulo de posição** projetado na Esfera Terrestre, com a circunferência de alturas iguais traçada na superfície da Terra, e a figura 27.11 mostra a representação da curva de posição (curva de alturas) **CC'** na Carta de Mercator.

Figura 27.10 - Circunferência de Posição na Esfera Terrestre

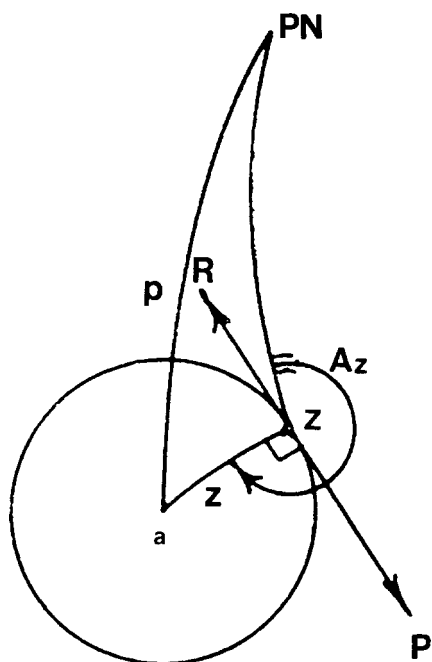
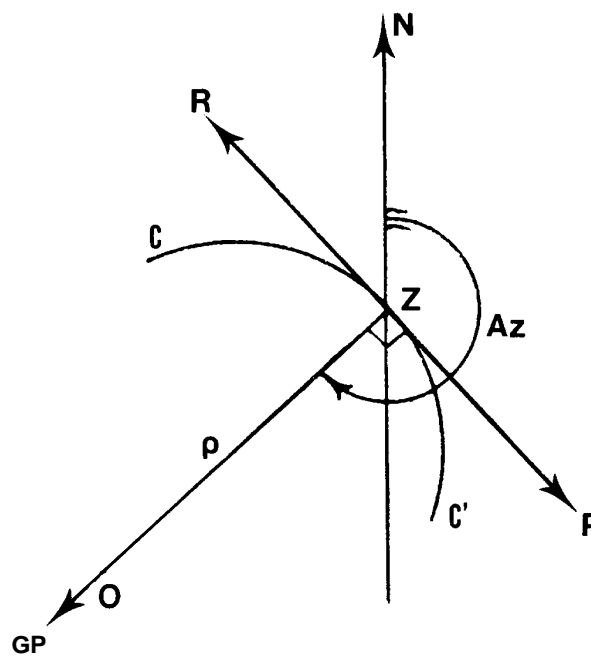


Figura 27.11 - Carta de Mercator

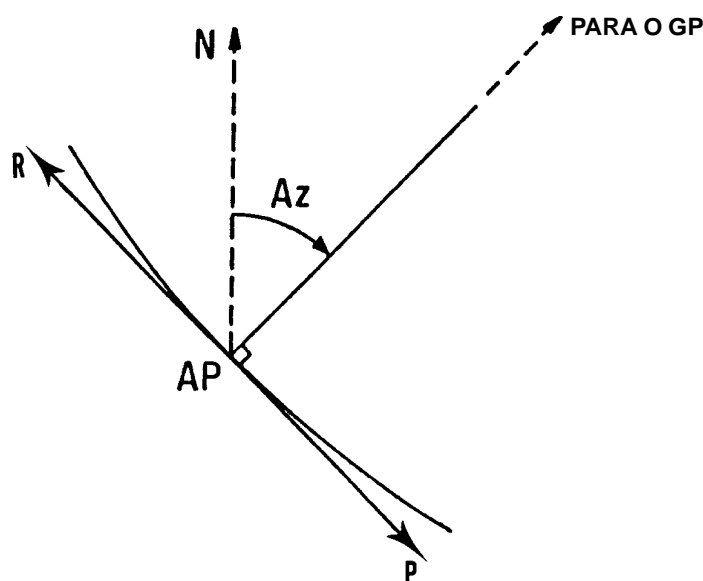


Sendo a reta RP uma tangente à **circunferência de alturas iguais**, nas proximidades da posição estimada, ela será normal ao raio da circunferência no ponto de tangência (distância zenital), que se orienta segundo o Azimute Verdadeiro (Az) do astro, no instante da observação, conforme mostrado na figura 27.10.

Como a projeção de Mercator é conforme, isto é, um ângulo na superfície da Terra é igual à sua representação na carta, resulta que a **reta de altura RP** será normal à projeção do vertical do astro na Carta de Mercator, o que equivale a afirmar que a **reta de altura** é perpendicular ao Azimute Verdadeiro (Az) do astro, no instante da observação.

Então, da **posição assumida (AP)** plotada na carta (ou folha de plotagem) pode-se traçar uma linha na direção do Azimute Verdadeiro (Az) do astro no momento da observação e afirmar que esta linha representa um segmento do raio da **circunferência de alturas iguais** correspondente ao astro observado e que, portanto, a **reta de altura** será perpendicular a ela (ver a figura 27.12).

Figura 27.12 - Traçado da Reta de Altura



27.5 ELEMENTOS DETERMINATIVOS DA RETA DE ALTURA. PONTO MARCQ SAINT-HILAIRE: MÉTODO DO VERTICAL ESTIMADO

Vimos que a **reta de altura** (ou **reta de posição**) substitui a **curva de alturas iguais** dentro de certos limites, sendo tangente a essa curva e perpendicular ao Azimute Verdadeiro do astro no instante da observação. Como a reta é limitada, normalmente colocam-se flechas nas suas extremidades.

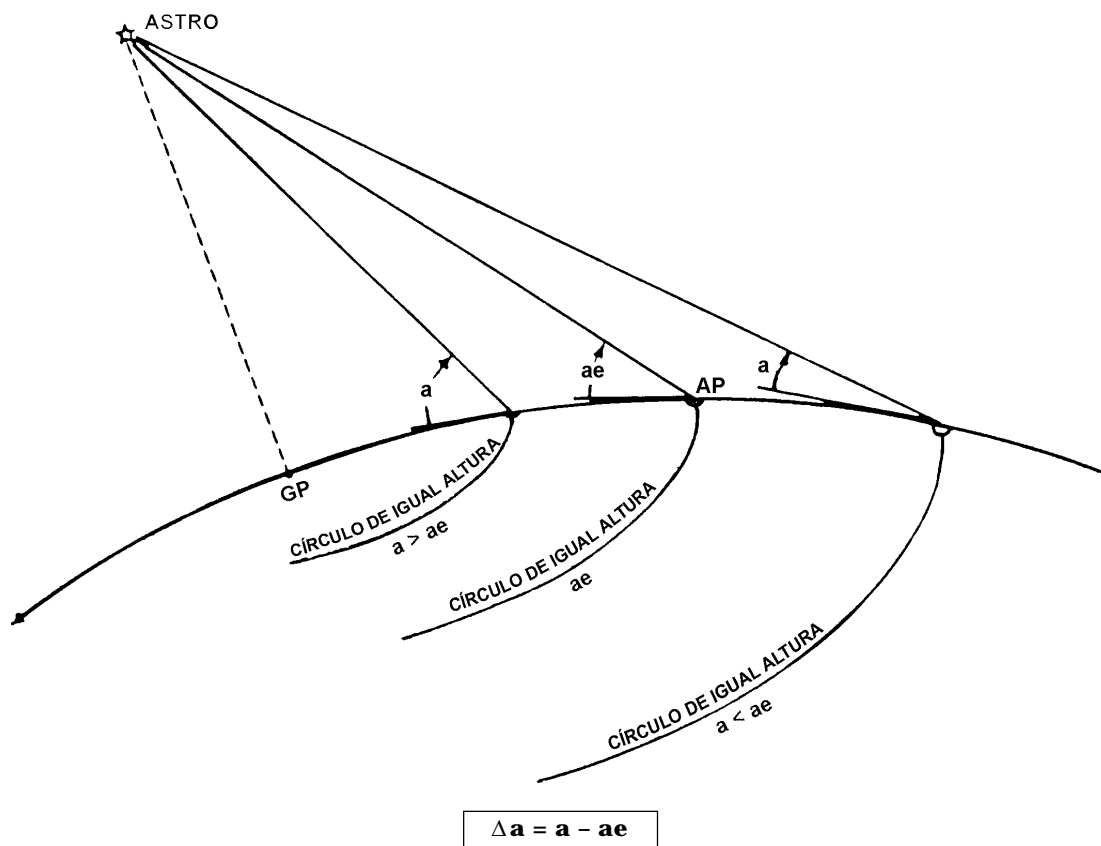
Denomina-se **ponto determinativo** de uma **reta de altura** ao ponto pertencente à reta e utilizado para o traçado da mesma na Carta Náutica ou folha de plotagem.

Conforme explicado anteriormente, para resolução do **triângulo de posição** assume-se uma posição para o observador (geralmente a posição estimada no instante da observação), obtendo-se o valor do **Azimute Verdadeiro (Az)** e da **altura calculada (ae)** do astro. Assim, parte-se da **posição estimada** (ponto mais próximo que se dispõe da verdadeira posição do navio) para se obter o **ponto determinativo**, pelo qual deve ser traçada a **reta de altura**, na carta ou folha de plotagem.

Entretanto, a altura realmente medida para o astro no momento da observação é diferente da **altura calculada (ae)**, porque o observador não está exatamente na **posição assumida (AP)**. Então, a **reta de altura** não vai passar exatamente na **posição assumida (AP)**.

Se a **altura verdadeira (a)** do astro é maior que a **altura calculada (ae)**, o raio da **circunferência de igual altura**, ou seja, a distância zenital verdadeira ($z = 90^\circ - a$), será menor que o raio da **circunferência de igual altura** correspondente à **altura calculada** ($z = 90^\circ - ae$) e a **reta de altura** estará, realmente, mais próxima do ponto subastral (GP do astro), isto é, estará na direção do GP, conforme mostrado na figura 27.13.

Figura 27.13 - Diferença de Alturas



- SE $a > ae$, O RAIOS DA CIRCUNFERÊNCIA DE IGUAL ALTURA CORRESPONDENTE À a SERÁ MENOR QUE O DA CORRESPONDENTE À ae , E A RETA DE ALTURA ESTARÁ NA DIREÇÃO DO AZIMUTE VERDADEIRO DO ASTRO.
- SE $a < ae$, O RAIOS DA CIRCUNFERÊNCIA DE ALTURA CORRESPONDENTE À a SERÁ MAIOR QUE O DA CORRESPONDENTE À ae , E A RETA DE ALTURA ESTARÁ NA DIREÇÃO OPOSTA À DO AZIMUTE VERDADEIRO DO ASTRO.
- A DISTÂNCIA DA POSIÇÃO ASSUMIDA (AP) ATÉ A LINHA DE POSIÇÃO SERÁ IGUAL À DIFERENÇA DE ALTURAS (Δa).

Se a **altura verdadeira (a)** do astro é menor que a **altura calculada (ae)**, ocorrerá o oposto, isto é, o raio da **circunferência de igual altura** correspondente à **altura verdadeira** ($z = 90^\circ - a$) será maior que o raio da **circunferência de igual altura** correspondente à **altura calculada** ($z = 90^\circ - ae$) e a nossa **reta de altura** estará, realmente, mais afastada do GP do astro que a posição assumida (AP), isto é, estará na direção oposta ao GP, como mostra, também, a figura 27.13.

A diferença em distância entre a **posição assumida (AP)** e o ponto onde passa nossa **reta de altura** é, conforme pode ser verificado na figura citada:

$$\Delta a = ze - z$$

Então:

$$\Delta a = (90^\circ - ae) - (90^\circ - a)$$

Ou:

$$\Delta a = a - ae$$

Assim sendo, pode ser obtido o **ponto determinativo da reta de altura** da seguinte maneira:

I – Plotar na carta a **posição assumida (AP)**;

II – a partir da **posição assumida (AP)**, traçar o **Azimute Verdadeiro (Az)** do astro, obtido do **Ângulo no Zênite (Z)**, determinado quando se resolve o **triângulo de posição**;

III – calcular: $\Delta a = a - ae$

sendo a a **altura verdadeira** do astro (obtida da altura instrumental, medida com o sextante) e ae a **altura calculada** (obtida da solução do triângulo de posição);

IV – sobre o **Azimute Verdadeiro** do astro traçado na carta, marcar uma distância igual à diferença de alturas (Δa) na **direção do Azimute**, se $a > ae$; ou na **direção oposta**, se $a < ae$;

V – o ponto assim obtido é o **ponto determinativo da reta de altura**; e

VI – passando por este ponto, traçar uma perpendicular ao Azimute Verdadeiro do astro. Esta será, então, a nossa **reta de altura**.

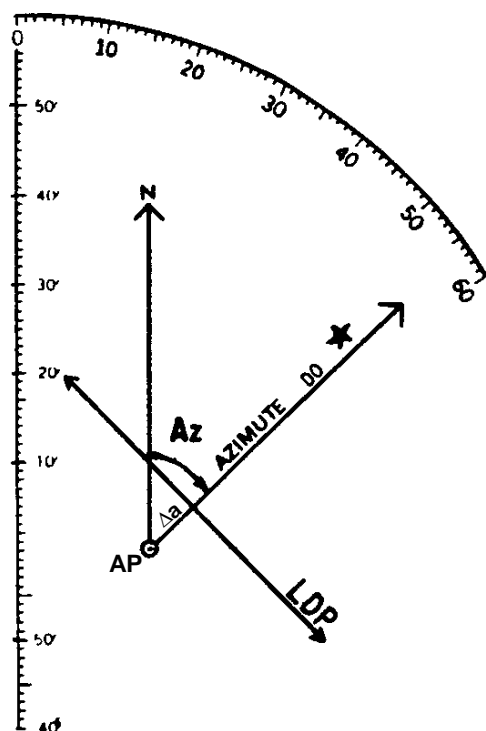
O **Azimute Verdadeiro (Az)** do astro e a diferença de alturas ($\Delta a = a - ae$) são denominados **elementos determinativos da reta de altura**.

O **ponto determinativo** obtido desta maneira é denominado **Ponto Marcq Saint-Hilaire** e o método descrito para sua obtenção recebe o nome de “**Método do Vertical Estimado**”.

Assim, ao se observar o astro, obtém-se a **altura instrumental (ai)** e a **hora de observação**. Em seguida, esta altura é transformada em **altura verdadeira (a)** e o **triângulo de posição** é resolvido (para a **hora da observação** e para a **posição estimada**, ou **assumida**), determinando-se o **Azimute Verdadeiro (Az)** e a **altura calculada (ae)** do astro. Podem, então, ser obtidos os **elementos determinativos da reta de altura**, $\Delta a = a - ae$ e **Az**. O **ponto determinativo** é plotado na Carta Náutica (ou folha de plotagem), marcando-se, a partir da posição assumida (AP), a **diferença de alturas (Δa)** na direção do **Azimute Verdadeiro** do astro, se $a > ae$; ou na sua recíproca, se $a < ae$. Traça-se, então, a **reta de altura**, na perpendicular ao Azimute Verdadeiro, conforme mostrado na figura 27.14 (A) e (B).

Mais detalhes sobre o **ponto Marcq Saint-Hilaire** e sobre outros **pontos determinativos** notáveis constam do Apêndice a este Capítulo.

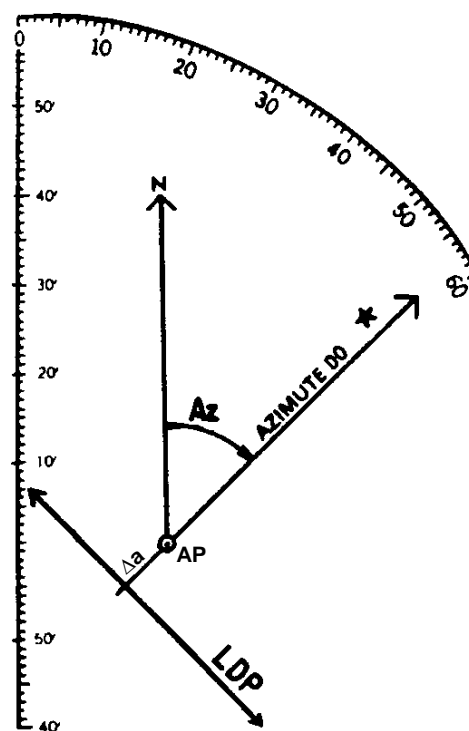
Figura 27.14 - Obtenção do Ponto Determinativo da Retra de Altura e Traçado da LDP



A - QUANDO $a > ae$

$$\Delta a = a - ae > 0$$

LDP NA DIREÇÃO DO
AZIMUTE VERDADEIRO
DO ASTRO



B - QUANDO $a < ae$

$$\Delta a = a - ae < 0$$

LDP NA DIREÇÃO
OPOSTA AO AZIMUTE
VERDADEIRO DO ASTRO

27.6 CÁLCULO DOS ELEMENTOS DETERMINATIVOS E PLOTAGEM DA RETA DE ALTURA. GRÁFICO PARA RETA DE ALTURA E SÉRIE DE OBSERVAÇÕES

27.6.1 INTRODUÇÃO

Vimos que, para traçar a **reta de altura** resultante da observação de um astro, é necessário, inicialmente, plotar uma **posição assumida (AP)**, geralmente a **posição estimada** do navio no instante da observação (ou uma posição escolhida próximo a ela), para, a partir desta posição, plotar os **elementos determinativos da reta de altura**, obter o **ponto determinativo da reta de altura** e, finalmente, traçar a **linha de posição (reta de altura)**.

Conforme anteriormente estudado, os **elementos determinativos** da reta de altura são:

- a. Diferença de alturas: $\Delta a = a - ae$
- b. Azimute Verdadeiro do astro: Az

Para obter a **diferença de alturas**, temos que dispor de:

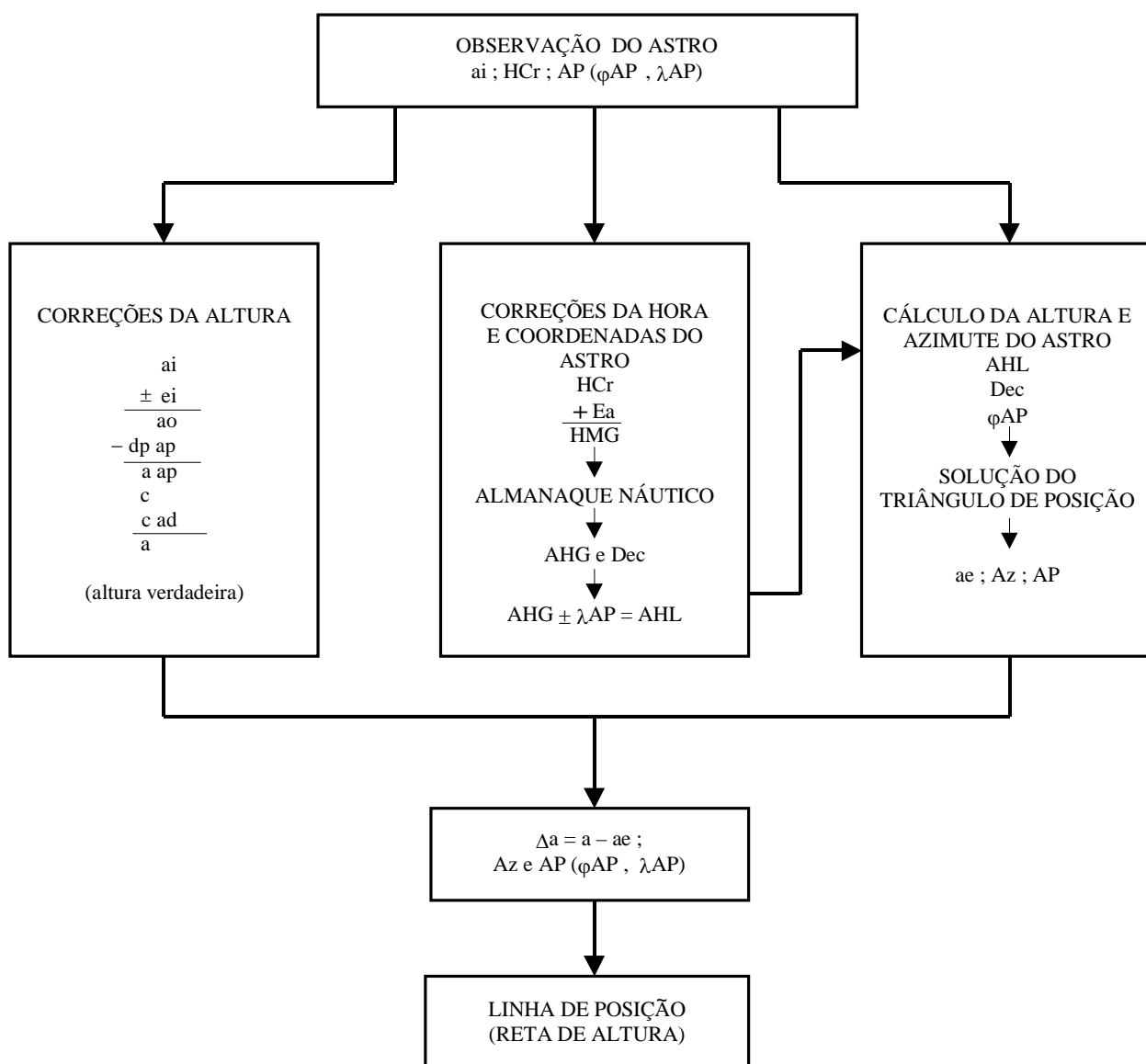
- **altura verdadeira (a)**
- **altura calculada (ae)**

A **altura verdadeira (a)** é obtida a partir da **altura instrumental (ai)** medida com o sextante, após aplicar as correções já estudadas.

A **altura calculada (ae)** é obtida pela solução do **triângulo de posição**, que também fornece o Azimute Verdadeiro (Az) do astro no instante da observação.

As etapas a serem seguidas na determinação de uma **linha de posição astronômica (reta de altura)** podem ser visualizadas na figura 27.15.

Figura 27.15 - Determinação de uma LDP Astronômica (Reta de Altura)



O **triângulo de posição** pode ser resolvido matematicamente, utilizando fórmulas e conceitos de **trigonometria esférica**, ou, mais comodamente, por meio de **Tábuas para Navegação Astronômica**, que nada mais são do que um conjunto de soluções do **triângulo de posição**, previamente calculadas, abrangendo todas as combinações possíveis de **Latitude**, **Ângulo Horário Local** e **Declinação**.

Neste capítulo será apresentada a solução matemática do **triângulo de posição**. No próximo, estudar-se-á a solução pelas **Tábuas para Navegação Astronômica** mais utilizadas atualmente.

27.6.2 SOLUÇÃO MATEMÁTICA DO TRIÂNGULO DE POSIÇÃO PARA OBTENÇÃO DOS ELEMENTOS DETERMINATIVOS DA RETA DE ALTURA

O navegante resolve o **triângulo de posição** para obter a **altura calculada (ae)** e o **Azimute Verdadeiro (Az)** do astro no instante da observação.

Para resolver o **triângulo de posição** é necessário conhecer:

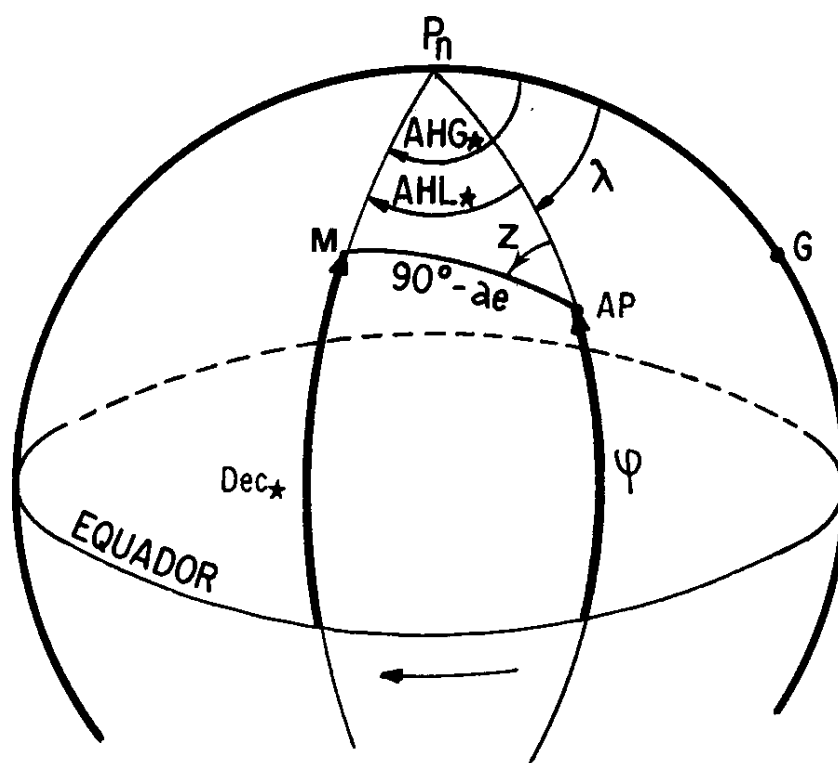
a. A **posição assumida (AP)**, neste caso, a **posição estimada** no instante da observação; e

b. as **coordenadas horárias** do astro no instante da observação:

$$\text{AHL} = \text{AHG} \pm \text{Longitude assumida}$$

$$\text{Declinação (Dec)}$$

Figura 27.16 - Solução Matemática do Triângulo de Posição



Então, usando os dados acima, resolve-se o **triângulo de posição**, podendo ser utilizadas as seguintes fórmulas (“Cosine-Haversine Formulae”), conforme ilustrado na figura 27.16:

$$ae = \text{arc sen} (\text{sen Lat} \cdot \text{sen Dec} + \text{cos Lat} \cdot \text{cos Dec} \cdot \text{cos AHL})$$

$$Z = \text{arc cos} \frac{(\text{sen Dec} - \text{sen Lat} \cdot \text{sen ae})}{(\text{cos ae} \cdot \text{cos Lat})}$$

REGRAS:

1. Se a **Latitude (Lat)** e a **Declinação (Dec)** têm **nomes contrários**, entrar a Declinação com o sinal negativo.

2. O **ângulo no Zênite (Z)**, obtido no cálculo, deve ser, ainda, transformado em **Azimute Verdadeiro (Az)**, usando as seguintes regras:

a. em **Latitude Norte:**

$$\text{AHL} < 180^\circ : \text{Az} = 360^\circ - Z (\text{Astro a Oeste})$$

$$\text{AHL} > 180^\circ : \text{Az} = Z \quad (\text{Astro a Leste})$$

b. em **Latitude Sul:**

$$\text{AHL} < 180^\circ : \text{Az} = 180^\circ + Z (\text{Astro a Oeste})$$

$$\text{AHL} > 180^\circ : \text{Az} = 180^\circ - Z (\text{Astro a Leste})$$

3. A posição assumida (AP) é a **posição estimada** do navio no instante da observação.

27.6.3 PLOTAGEM DA RETA DE ALTURA. GRÁFICO PARA RETA DE ALTURA E SÉRIE DE OBSERVAÇÕES

Calculados os **elementos determinativos**, a etapa final de obtenção de uma **LDP astronômica** consiste na **plotagem da reta de altura**.

As **retas de altura** podem ser plotadas diretamente na Carta Náutica ou, o que é mais comum, traçadas primeiro em uma folha de plotagem, transferindo-se posteriormente para a carta apenas a posição, obtida pelo cruzamento de várias LDP. No Brasil, a folha de plotagem utilizada denomina-se **GRÁFICO PARA RETA DE ALTURA E SÉRIE DE OBSERVAÇÕES** (modelo DHN-0620).

Este gráfico é empregado para o traçado de **retas de altura**, especialmente as oriundas de observações de astros no decorrer dos crepúsculos. Ao invés de as diversas retas serem plotadas na Carta Náutica, elas são traçadas no gráfico, o que, como veremos, não só facilitará bastante o problema, como também evitará que muitos riscos sejam feitos numa carta que ainda será utilizada outras vezes.

Desde que seja determinada a posição do navio pelo cruzamento das diversas **retas de altura**, é ela transportada para a Carta Náutica na qual estiver sendo feita a navegação.

O Gráfico para Reta de Altura e Série de Observações (também conhecido como folha N-7) divide-se em três partes distintas: **Diagrama Circular**, **Escala de Distância e Latitude** e **Escala Logarítmica**.

– Diagrama Circular

Possui um diâmetro horizontal, que é um paralelo de Latitude graduado em minutos de Longitude a partir do centro para Leste (90°) e para Oeste (270°). Quando se trabalha com uma única observação, este paralelo poderá ser considerado o da Latitude estimada, mas, no caso geral de empregarem-se várias posições assumidas para o cálculo de diversas retas, este paralelo será designado com o valor da Latitude assumida (em graus inteiros, evidentemente), utilizado no cálculo.

O diâmetro vertical é o **meridiano central** do gráfico. Para o caso de uma única reta, ele deverá ser designado com o valor da Longitude estimada ou assumida para o cálculo. No caso de diversas retas, tendo sido empregadas várias posições assumidas, ele será designado com um valor em graus inteiros mais próximo da Longitude estimada.

Quando se usa uma única **posição estimada** para o cálculo de diversas retas é interessante, pois facilitará o traçado dos azimutes, colocar-se esta no centro do diagrama. O diâmetro horizontal será a Latitude estimada e o diâmetro vertical a Longitude estimada.

As demais linhas verticais são meridianos com dezenas de minutos de afastamento do meridiano central do gráfico.

O diagrama circular é limitado por uma **rosa graduada** para traçado de rumos e azimutes. As direções azimutais são representadas pelas graduações, de grau em grau, de 000° a 360° .

As Latitudes são medidas sobre as linhas perpendiculares ao diâmetro horizontal do Diagrama Circular. No Hemisfério Sul, a contagem da Latitude aumenta para a parte inferior do Diagrama; no Hemisfério Norte ocorre o inverso, isto é, as Latitudes crescem para a parte superior do Diagrama.

As Longitudes são medidas ao longo do diâmetro horizontal; quando se está a Oeste de Greenwich, os valores crescem da direita para a esquerda; quando a Leste de Greenwich, passa-se o contrário.

– Escala de Distância e Latitude

A escala abaixo do Diagrama Circular mostra valores de Latitude que vão de 00° a 60° .

Desejando-se plotar ou retirar do Diagrama Circular uma distância em milhas ou diferença de Latitude, deveremos traçar nesta escala uma linha horizontal passando pelo valor da Latitude estimada, encontrado na graduação à esquerda. Sobre esta linha poderão ser tomadas distâncias ou diferenças de latitudes em milhas, de acordo com as graduações encontradas nas partes superior e inferior da escala.

Sobre a linha de Latitude de zero grau poderão ser tomadas diferenças de longitude, pois aí os minutos de Latitude ou Longitude são, como sabemos, iguais.

– Escala Logarítmica

Empregada para resolver problemas que envolvem velocidade, tempo e distância, tal como o de conhecer o caminho percorrido em determinado tempo, com um valor de velocidade definido.

Por exemplo, desejamos saber que distância percorre um navio em 24 minutos a 15 nós.

$$\text{Sabendo que: } d = \frac{24 \times 15}{60},$$

toma-se um compasso e ajusta-se uma abertura tal que a ponta da direita fique sobre 60 e a ponta da esquerda sobre 15. Sem variar a abertura, desloca-se a ponta da direita para o número 24 e lê-se, na graduação onde cair a ponta esquerda, o valor desejado; no caso, 6'.

Como outro exemplo, deseja-se saber a velocidade de um navio que percorre 4 milhas em 12 minutos. Coloca-se a ponta direita do compasso sobre 12 e a ponta esquerda sobre o número 4. Sem variar a abertura, leva-se a ponta direita a coincidir com o número 60. A graduação onde cair a ponta esquerda do compasso indicará o valor desejado; no caso, 20 nós.

– Emprego do Gráfico

A utilização do **Gráfico para Reta de Altura** obedece às seguintes normas:

a. Num dos extremos do diâmetro horizontal do diagrama, lança-se o valor da Latitude empregada no cálculo;

b. num dos extremos do diâmetro vertical do diagrama, lança-se o valor, em graus inteiros, das Longitudes empregadas no cálculo (no caso de serem usadas várias Longitudes assumidas); quando se utiliza uma única posição estimada para o cálculo de diversas retas, ou quando se calcula uma só reta, numera-se o diâmetro vertical com o valor da Longitude estimada;

c. plota-se no diagrama circular a posição (Latitude e Longitude) usada no cálculo de cada uma das retas de altura;

d. na Escala de Distância e Latitude, traça-se a linha horizontal correspondente à Latitude usada no cálculo;

e. a partir da posição correspondente a cada uma das retas, traçam-se os **Azimuths** e medem-se sobre estes as **diferenças de alturas** (obtidas na Escala de Distância e Latitude, na Latitude usada no cálculo); e

f. finalmente traçam-se, perpendicularmente às direções azimutais, as **retas de altura**.

Dependendo da velocidade do navio e do intervalo de tempo entre as observações de cada astro, poderá ser necessário fazer o transporte de cada reta para o instante da última observação. Para isso, o procedimento a ser seguido é o de transportar a reta paralelamente a si mesma, na direção do rumo do navio, de uma distância igual ao caminho percorrido pelo navio no intervalo de tempo decorrido entre a hora em que foi feita a observação em pauta e a hora da última observação.

No caso de posição por **retas de alturas sucessivas**, como, por exemplo, a **posição ao meio dia** (por cruzamento da **reta da manhã** transportada com a **Latitude meridiana**) e a **posição da tarde** (obtida por interseção da **reta da tarde** com a **meridiana transportada**), o problema também pode ser todo resolvido primeiro no gráfico, transferindo-se para a Carta Náutica somente as posições obtidas.

Num dos extremos da **reta de altura** anota-se o nome do astro (acima da reta) e a hora da observação (abaixo da reta). Quando se cruzam várias **retas de altura** para determinação de uma posição, basta identificar cada reta com o nome do astro a que se refere, anotando-se a hora da posição ao lado do ponto obtido.

EXEMPLOS:

1. No dia 08 de novembro de 1993, às Hleg = 0927, foi observado o Sol (limbo inferior) tendo sido determinada a **altura instrumental** ai = 60° 09,0'.

A posição **estimada** do navio era Latitude 33° 00,0' S e Longitude 038° 40,0' W. Calcular os **elementos determinativos** e plotar a **reta de altura** obtida, sabendo-se que:

$$\begin{aligned} \text{HCr} &= 12^{\text{h}} 26^{\text{m}} 15,0^{\text{s}}; & \text{Elev} &= 14 \text{ metros}; \\ \text{Ea} &= + 00^{\text{h}} 01^{\text{m}} 17,0^{\text{s}}; & \text{ei} &= - 2,0' \end{aligned}$$

SOLUÇÃO:

$$\begin{array}{r} \text{a.} \quad \text{Hcr} = 12^{\text{h}} 26^{\text{m}} 15,0^{\text{s}} \\ \quad \quad \text{Ea} = + 00^{\text{h}} 01^{\text{m}} 17,0^{\text{s}} \\ \hline \text{HMG} = 12^{\text{h}} 27^{\text{m}} 32,0^{\text{s}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 08/11/93 \quad \text{HMG} = 12^{\text{h}} : \text{AHG} = 004^{\circ} 03,3' \quad ; \quad \text{Dec} = 16^{\circ} 39,3' \text{ S (d=+0,7')} \\ \quad \quad \text{Acréscimo para } 27^{\text{m}} 32,0^{\text{s}} = 06^{\circ} 53,0' \quad ; \quad \quad \text{c} = + 0,3' \\ \hline \text{HMG} = 12^{\text{h}} 27^{\text{m}} 32,0^{\text{s}} : \quad \text{AHG} = 010^{\circ} 56,3' \quad ; \quad \text{Dec} = 16^{\circ} 39,6' \text{ S} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{Long} = 038^{\circ} 40,0' \text{ W} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{AHL} = 332^{\circ} 16,3' \end{array}$$

b. Assim, os elementos para cálculo do **triângulo de posição** são:

$$\begin{aligned} \text{AHL} &= 332^{\circ} 16,3' \\ \text{Dec} &= 16^{\circ} 39,6' \text{ S} \\ \text{Lat e} &= 33^{\circ} 00,0' \text{ S} \end{aligned}$$

Pela solução matemática, com o uso das fórmulas anteriormente citadas, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \text{ae} &= 60^{\circ} 09,1' \\ \text{Z} &= 116,4^{\circ} \text{ SE} \rightarrow \text{Az} = 063,6^{\circ} \end{aligned}$$

c. A **altura verdadeira** do Sol é:

$$\begin{array}{r} \text{ai} = 60^{\circ} 09,0' \\ \text{ei} = - 2,0' \\ \hline \text{ao} = 60^{\circ} 07,0' \\ \text{dp ap (14m)} = - 6,6' \\ \hline \text{a ap} = 60^{\circ} 00,4' \\ \text{c} = + 15,7' \\ \hline \text{a} = 60^{\circ} 16,1' \end{array}$$

d. Os **elementos determinativos** da reta de altura são:

$$\begin{aligned} \text{a} &= 60^{\circ} 16,1' \\ \text{ae} &= 60^{\circ} 09,1' \\ \hline \Delta \text{a} = \text{a} - \text{ae} &= + 07,0' \\ \text{Az} &= 063,6^{\circ} \end{aligned}$$

e. Para plotagem da **reta de altura** no Gráfico para Reta de Altura e Série de Observações (folha N-7), numera-se o diâmetro horizontal do Diagrama Circular com o valor da Latitude estimada, $\varphi_e = 33^\circ\text{S}$. Como se trata da plotagem de apenas uma reta de altura, numera-se o diâmetro vertical do Diagrama Circular com o valor da Longitude estimada, $\lambda_e = 038^\circ 40,0' \text{W}$.

f. Em seguida, traça-se na **Escala de Distância e Latitude** uma linha horizontal na Latitude 33° (valor da Latitude empregada no cálculo). Sobre esta linha, mede-se o valor da **diferença de alturas**, $\Delta a = + 7,0'$.

g. Do centro do **Diagrama Circular** (que representa a **posição estimada** do navio no instante da observação), traça-se uma linha na direção do Azimute Verdadeiro do astro, $Az = 063,6^\circ$. Sobre esta linha, na direção do Azimute (pois $\Delta a > 0$), marca-se a distância de $7,0'$. Está definido, assim, o **ponto determinativo da reta de altura**.

h. Então, traça-se a **reta de altura**, na perpendicular ao Azimute Verdadeiro (isto é, na direção $063,6^\circ + 90^\circ = 153,6^\circ$). Identifica-se a **reta de altura** com o nome do astro e a hora da observação. A plotagem da **reta de altura** é mostrada na figura 27.17.

Esta LDP representa o lugar geométrico das posições que pode ocupar o navio, tendo sido feita a observação de altura do Sol mencionada no problema. A posição astronômica é definida pela interseção de duas ou mais **retas de altura**, conforme veremos no exemplo que se segue.

2. No dia 20 de abril de 1993, no crepúsculo matutino, foram observadas sucessivamente três estrelas para determinação da posição do navio. Os seguintes dados foram, então, registrados:

Latitude da posição assumida (φ_{AP}) = 24°S

Hleg = 0557; odômetro = $148,7'$; R = 290° ; vel = 14 nós.

VEGA : $\lambda_{AP} = 044^\circ 25,0' \text{W}$; $\Delta a = + 06,9'$; $Az = 343,7^\circ$

ANTARES : $\lambda_{AP} = 044^\circ 02,2' \text{W}$; $\Delta a = + 10,5'$; $Az = 255,7^\circ$

FOMALHAUT : $\lambda_{AP} = 043^\circ 50,0' \text{W}$; $\Delta a = - 23,5'$; $Az = 108,3^\circ$

Plotar as **retas de altura** e determinar a **posição astronômica** do navio.

SOLUÇÃO:

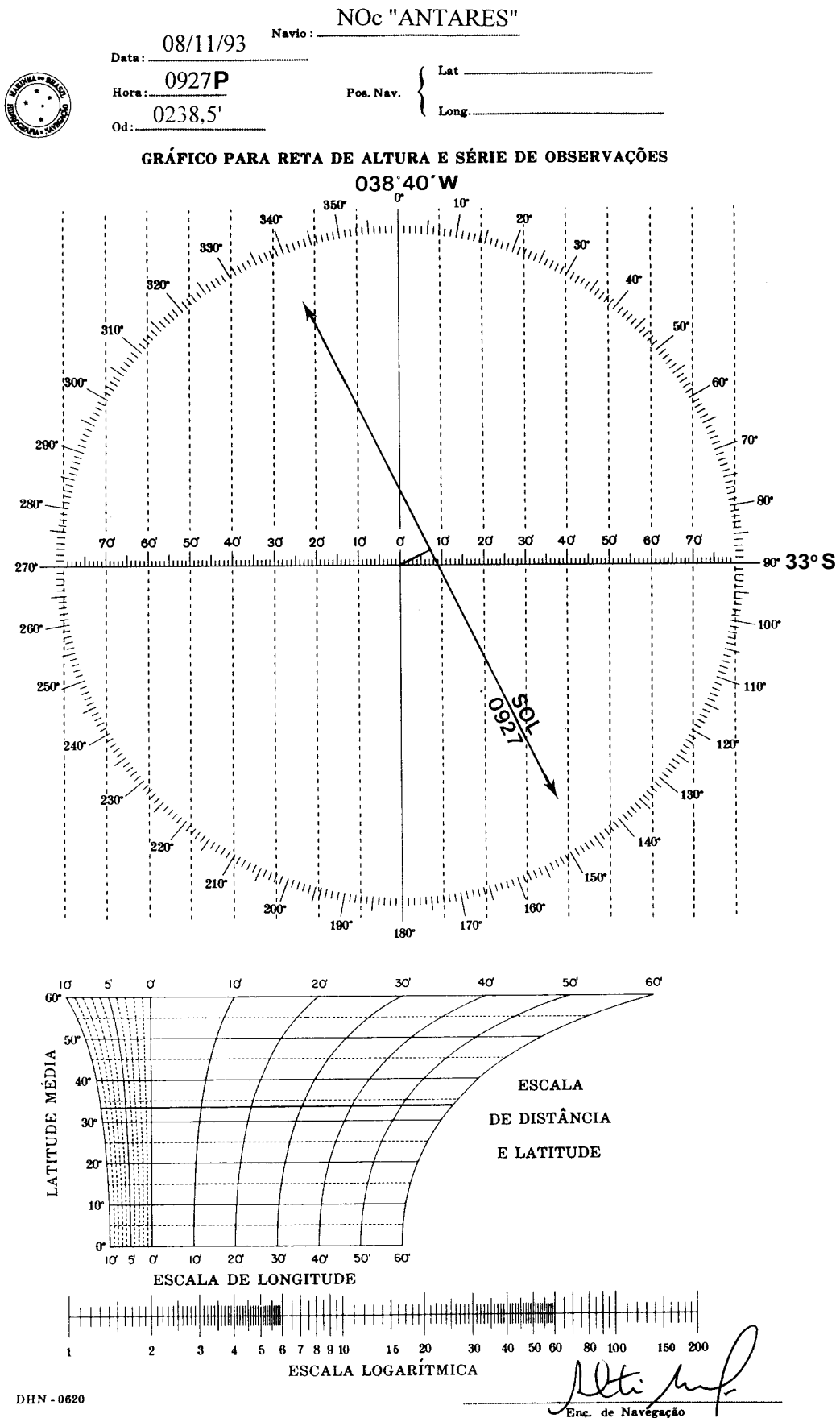
a. Numera-se o diâmetro horizontal do Diagrama Circular com o valor da Latitude assumida, $\varphi_{AP} = 24^\circ \text{S}$.

b. Como foram utilizados três valores diferentes de **Longitude assumida**, numera-se o diâmetro vertical do Diagrama Circular com o valor em graus inteiros mais próximo das Longitudes utilizadas nos cálculos das **retas de altura**. Neste caso, $\lambda = 044^\circ \text{W}$.

c. Em seguida, traça-se na **Escala de Distância e Latitude** uma linha horizontal na Latitude de 24° (valor da Latitude empregada nos cálculos). Sobre esta linha, vão-se medir as **diferenças de altura** (Δa) e de **Latitude**.

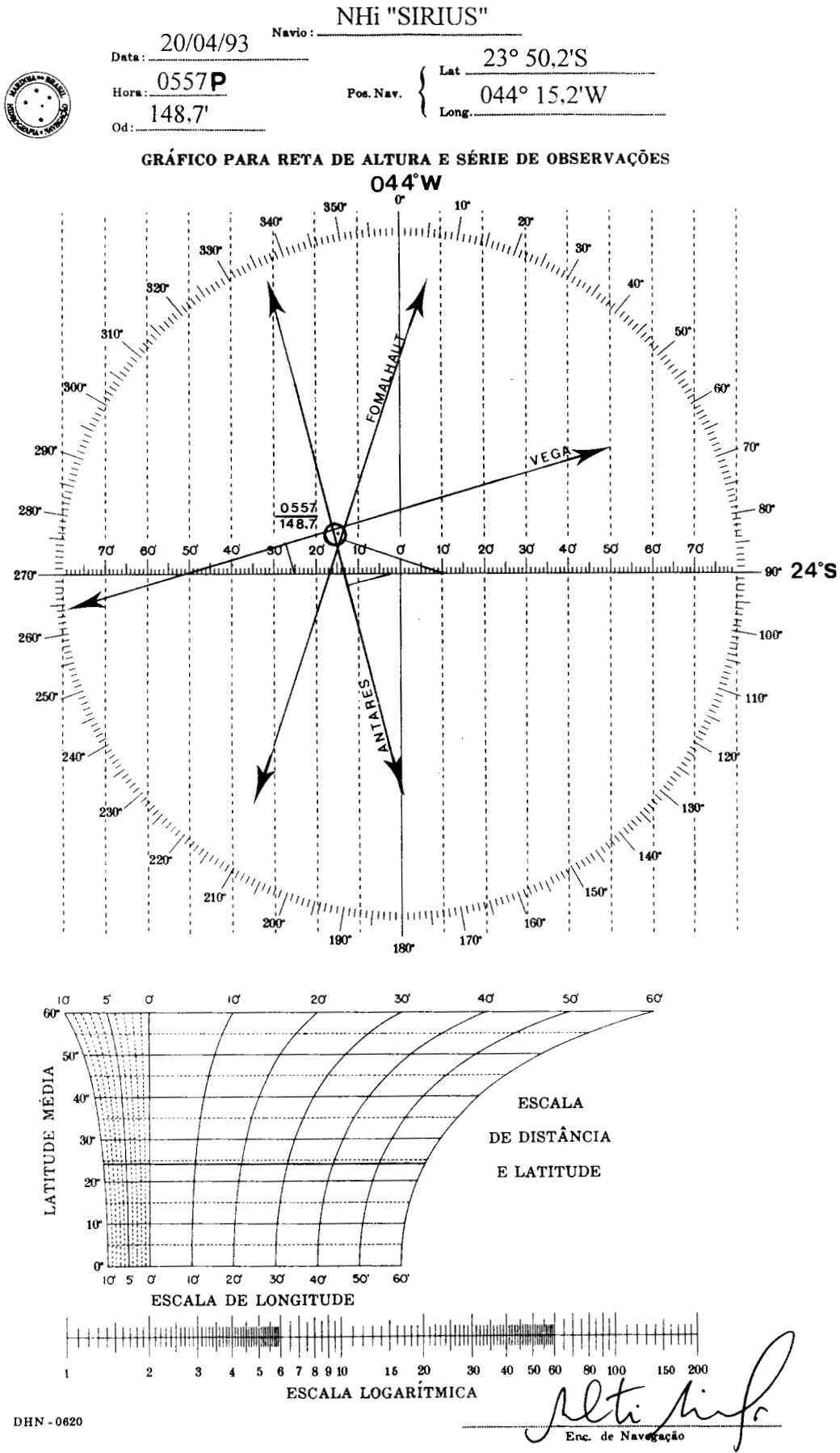
d. Plotam-se as 3 **posições assumidas** e traçam-se as **retas de altura**, com os **elementos determinativos** (Δa e Az) dados no problema. Então, identifica-se cada LDP com o nome do astro a que se refere.

Figura 27.17 - Plotagem da Reta de Posição



DHN - 0620

Figura 27.18 - Plotagem da Posição Astronômica



e. A **posição astronômica** do navio estará na interseção das **retas de altura**. Se as retas não se cruzarem em um ponto, formando um pequeno triângulo, adota-se para posição do navio o centro da figura. Se o triângulo for grande, há erro na posição e são necessários procedimentos especiais, comentados em capítulos que se seguem.

f. Determinada a **posição astronômica**, anota-se ao lado a Hora Legal e o valor do odômetro correspondentes. A partir da posição obtida, traça-se o rumo do navio, identificando a linha traçada com o valor do **rumo** e da **velocidade**.

Coordenadas da posição das 0557 (Hleg):

Latitude 23° 50,2' S e

Longitude 044° 15,2' W.

O traçado das **retas de altura** e a plotagem da **posição astronômica** estão mostrados na figura 27.18.