

APÊNDICE AO CAPÍTULO 29

1. ERROS QUE AFETAM UMA RETA DE ALTURA

Como vimos no corpo do Capítulo 29, as **retas de altura** são afetadas por erros que podem ser provenientes de diversas fontes, abaixo enumeradas:

- Erro da altura verdadeira;
- erro do Estado Absoluto ou da HMG;
- erro da altura estimada ou calculada;
- erro em se considerar Δa como arco de loxodromia;
- erro do Azimute;
- erro de substituição da curva pela tangente; e
- erro de transporte da reta.

a. Erro da altura verdadeira

A experiência tem demonstrado que, em condições normais, o erro máximo da **altura verdadeira** é de:

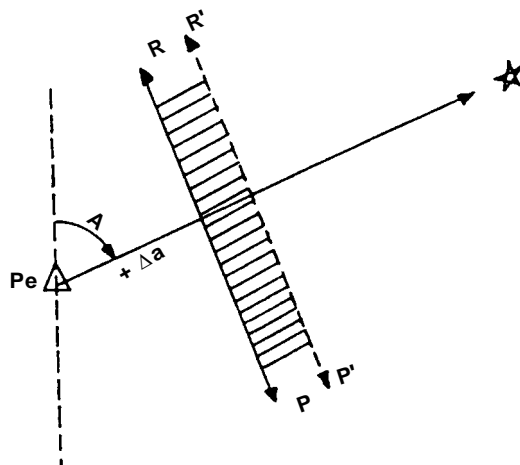
- $\pm 2'$ para o SOL;
- $\pm 3'$ para observações nos crepúsculos; e
- $\pm 4'$ e $5'$ para observações noturnas de estrelas e planetas,

sempre com referência ao horizonte do mar e para alturas isoladas, porque uma série de alturas baixaria esses valores, pela redução dos **erros acidentais**.

Um erro para mais no cômputo da altura verdadeira redundaria numa diminuição da distância zenital, o que significa uma redução do raio esférico da **circunferência de posição**, fazendo, conseqüentemente, a **reta de altura** se aproximar da projeção do astro (ponto subastral).

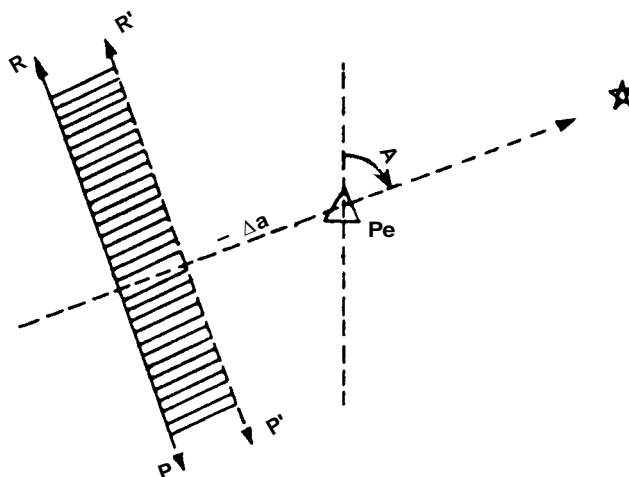
Suponhamos que **a** (altura verdadeira) é maior que **ae** (altura calculada ou estimada). Assim, a **diferença de alturas** ($\Delta a = a - ae$) será positiva ($\Delta a > 0$). Aumentando **a**, a diferença Δa também aumenta, acarretando o deslocamento da **reta de altura** no sentido do astro (ver a figura 29A.1).

Figura 29A.1 -



Por outro lado, se $a < a_e$, tem-se $\Delta a < 0$. Neste caso, um aumento de a equivale a uma redução no valor absoluto da diferença Δa , fazendo com que a **reta de posição** se desloque no sentido do astro, como mostra a figura 29A.2.

Figura 29A.2 -



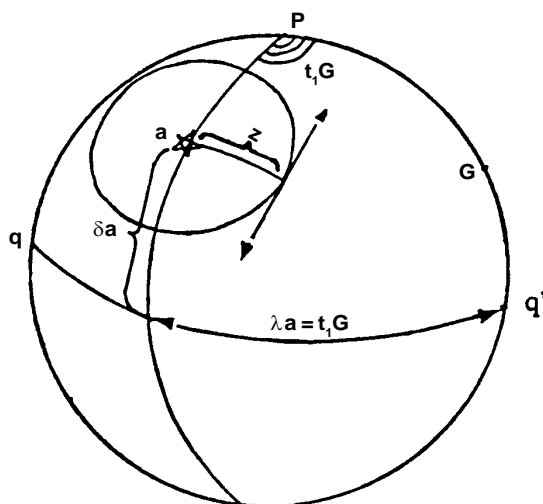
Do exposto, conclui-se que um erro para mais na **altura verdadeira** se reflete integralmente no afastamento da **reta de posição**, tendendo sempre a aproximá-la da projeção do astro (ponto subastral), ou, por outras palavras, deslocando-a de um valor igual ao erro cometido na determinação da **altura verdadeira**, no sentido do astro.

Um erro para menos na **altura verdadeira** terá um efeito oposto, isto é, refletir-se-á integralmente na posição da **reta de altura**, tendendo sempre a afastá-la da projeção do astro (ponto subastral), ou seja, deslocará a reta de posição de um valor igual ao erro cometido na determinação da **altura verdadeira**, no sentido oposto ao do astro.

b. Erro do Estado Absoluto ou da HMG

A projeção a de um astro na superfície terrestre é determinada, como se sabe, pela sua Declinação, como Latitude, e pelo t_1G , como Longitude (figura 29A.3).

Figura 29A.3 -



Um erro na determinação do Estado Absoluto do cronômetro faz com que a HMG venha, também, afetada desse valor. Entrando-se no Almanaque Náutico com a HMG errada, o t_1G , deduzido em função dessa HMG, virá, conseqüentemente, alterado, o que ocasiona um deslocamento do ponto **a**. O centro se deslocando, toda a circunferência de posição se desloca paralelamente a si mesma, para **E** ou **W**. O mesmo se dará, na carta, com a curva de posição respectiva e a tangente de posição traçada em um ponto qualquer dessa curva (**reta de altura**).

O sentido de deslocamento da reta depende do sinal de ΔEa (variação do Estado Absoluto), de modo que, se a HMG empregada no cálculo for maior que a exata, o deslocamento será para **W**, e vice-versa.

O caminho em Longitude, em minutos de arco, correspondente ao deslocamento da reta, é dado por:

$\frac{\Delta Ea}{4}$, sendo ΔEa dado em segundos, porque:

$$\begin{array}{l} 15' \longrightarrow 1 \text{ min} \\ 15' \longrightarrow 60 \text{ s} \\ 1' \longrightarrow 4 \text{ s} \\ x \longrightarrow \Delta Ea \therefore \end{array}$$

$$x = \frac{\Delta Ea}{4} \text{ (em minutos de arco)}$$

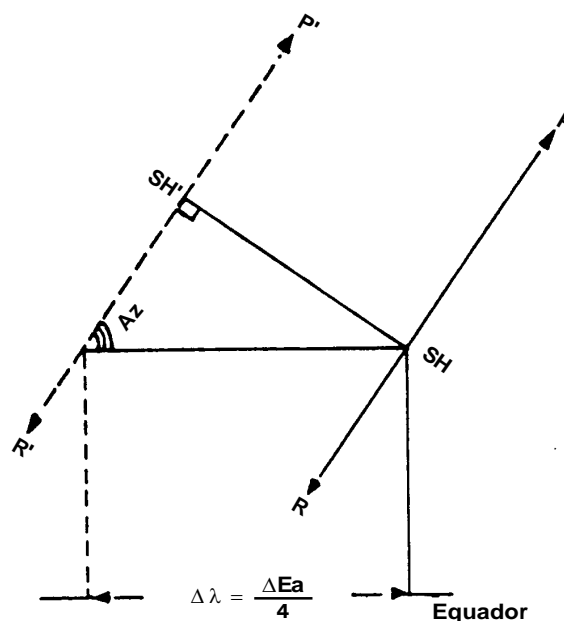
Sendo a expressão do **apartamento**:

$$ap = \frac{\Delta Ea}{4} \cos \varphi$$

O deslocamento da **reta de posição**, paralelamente a si mesma, $SH-SH'$, é dado por (ver a figura 29A.4):

$$\frac{\Delta Ea}{4} \cdot \cos \varphi \text{ sen } Az \text{ (em minutos de Latitude)}$$

Figura 29A.4 -



O efeito do erro do **Estado Absoluto (Ea)** é nulo para $Az = 000^\circ$ e $Az = 180^\circ$, ou seja, na **passagem meridiana** do astro (reta orientada no sentido E–W), e máximo quando $Az = 090^\circ$ e $Az = 270^\circ$, isto é, no corte do 1º vertical ou máxima digressão (reta orientada no sentido N–S).

Em vista da precisão dos cronômetros e da facilidade de recepção de sinais horários, atualmente, o erro ΔEa tornou-se muito pequeno. Em todo caso, a exatidão da hora da observação deve ser uma preocupação constante do navegante, pois basta um erro de 1 segundo para causar um erro na obtenção da reta de altura de 0,25' em Longitude, pois:

$$\Delta \lambda = \frac{\Delta Ea}{4} = \frac{1}{4} = 0,25'$$

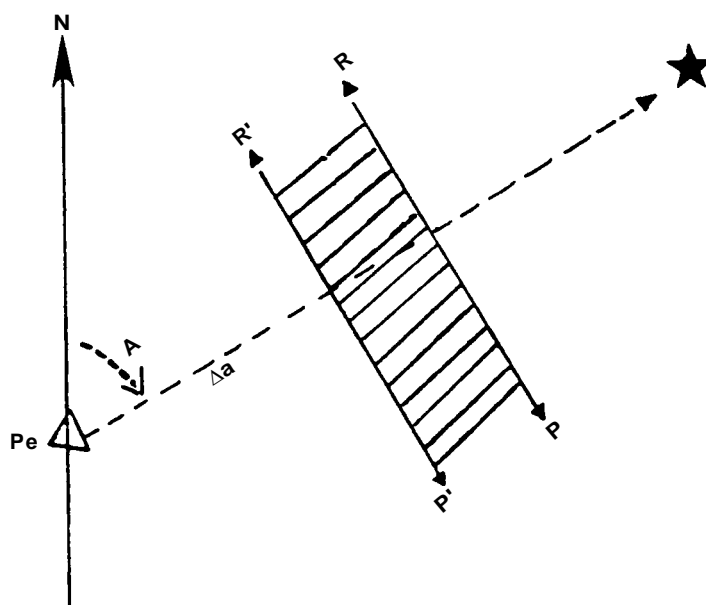
c. Erro da Altura Estimada ou Calculada

Esse erro tem duas origens:

1ª. O erro em **HMG** com a qual se deduzem t_1 e δ para cálculo de **ae**, muito pequeno, hoje em dia, em vista da facilidade de verificação constante dos cronômetros.

2ª. Má interpolação e arredondamento nos cálculos. Esse erro é, no máximo, de 2' para cada lado da reta. Sendo **a** (altura verdadeira) maior que **ae** (altura calculada ou estimada), tem-se $\Delta a = a - ae > 0$. Aumentando **ae**, a diferença Δa diminui, deslocando a reta no sentido oposto ao do astro (ver a figura 29A.5).

Figura 29A.5 –

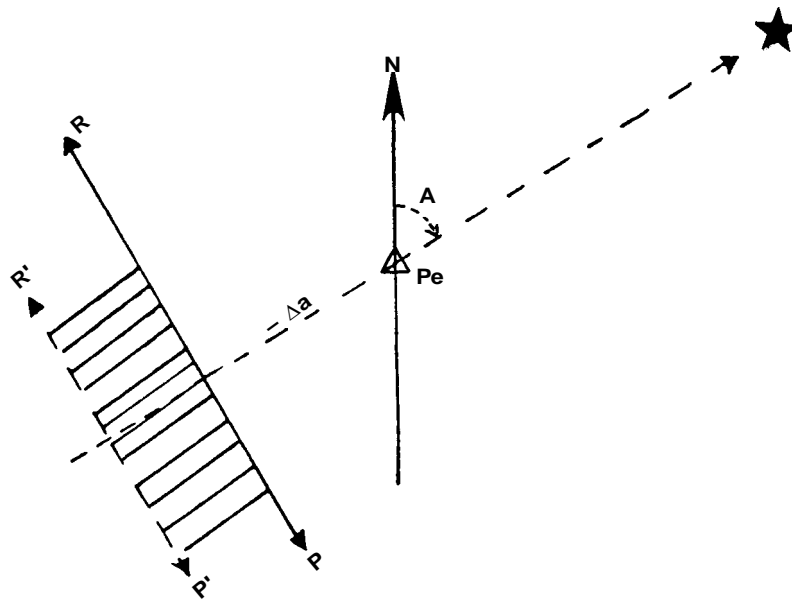


Quando $a < ae$, tem-se $\Delta a = a - ae < 0$. Um aumento de **ae** equivale a um acréscimo igual no valor absoluto de Δa , fazendo com que a reta também se desloque no sentido oposto ao do astro (ver a figura 29A.6).

Assim, um erro para mais no cômputo da altura calculada, ou estimada (**ae**) desloca a reta do mesmo valor no sentido contrário ao do astro. Por outro lado, um erro

para menos no cômputo da altura calculada (**ae**) terá o efeito oposto, isto é, deslocará a reta do mesmo valor do erro, no sentido do astro.

Figura 29A.6 -

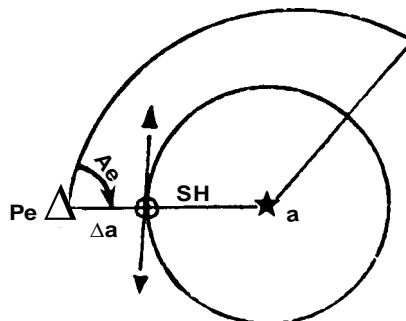


d. Erro em se considerar Δa como arco de loxodromia

Como a diferença $\Delta a = a - ae$ é pequena (figura 29A.7) pode-se desprezar o erro proveniente da hipótese de se considerar como loxodrômico um arco que, na realidade, é ortodrômico.

Até a distância de 120 milhas, qualquer que seja a Latitude, a diferença entre um arco de loxodromia e a correspondente ortodromia é desprezível.

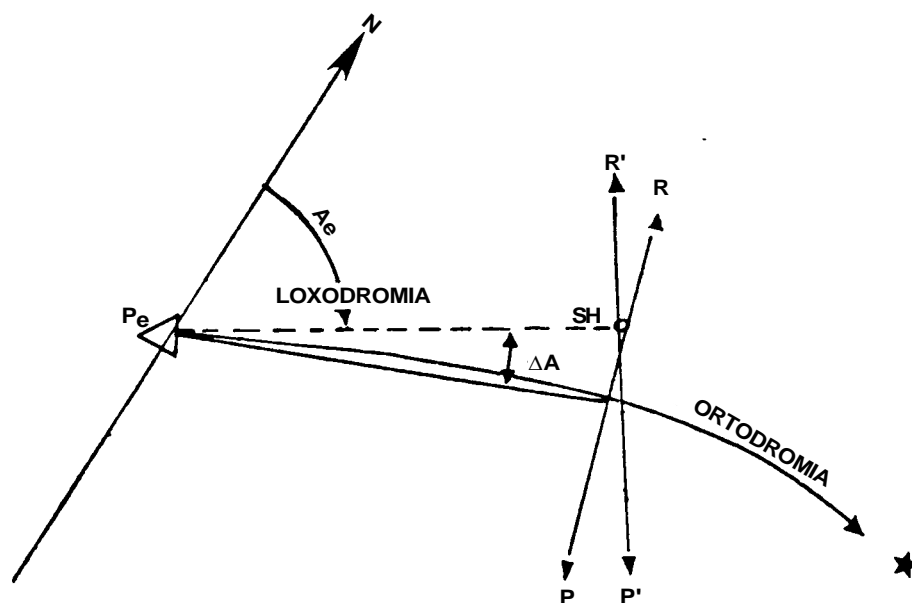
Figura 29A.7 -



e. Erro do Azimute

Como a direção do Azimute é um arco de ortodromia, que é substituído por um arco de loxodromia (ao traçar o Azimute estimado na carta), segue-se que, teoricamente, o Azimute deve sofrer uma correção ΔA , como mostra a figura 29A.8.

Figura 29A.8 -



O Azimute correto é dado pela expressão:

$$A \text{ (correto)} = Ae \pm \Delta a \cdot \text{tg } \varphi_m \cdot \text{sen } Ae$$

A expressão $\Delta a \cdot \text{tg } \varphi_m \cdot \text{sen } Ae$ é denominada **correção azimutal**, em que φ_m é a Latitude média entre a posição assumida (ou estimada) e o ponto SH.

Mas, para Latitudes inferiores a 60° e Δa menor que $50'$, pode-se desprezar esse erro.

f. Erro da substituição da curva pela tangente

Esse erro é dado pela expressão, já deduzida anteriormente:

$$x = \frac{m^2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos t_1 \cdot \cos \delta}{6876 \cos a}$$

Onde m é a distância do ponto de tangência, expressa em minutos de Equador (\cong milhas náuticas) e x é a separação entre a tangente (reta de altura) e a circunferência oscultriz.

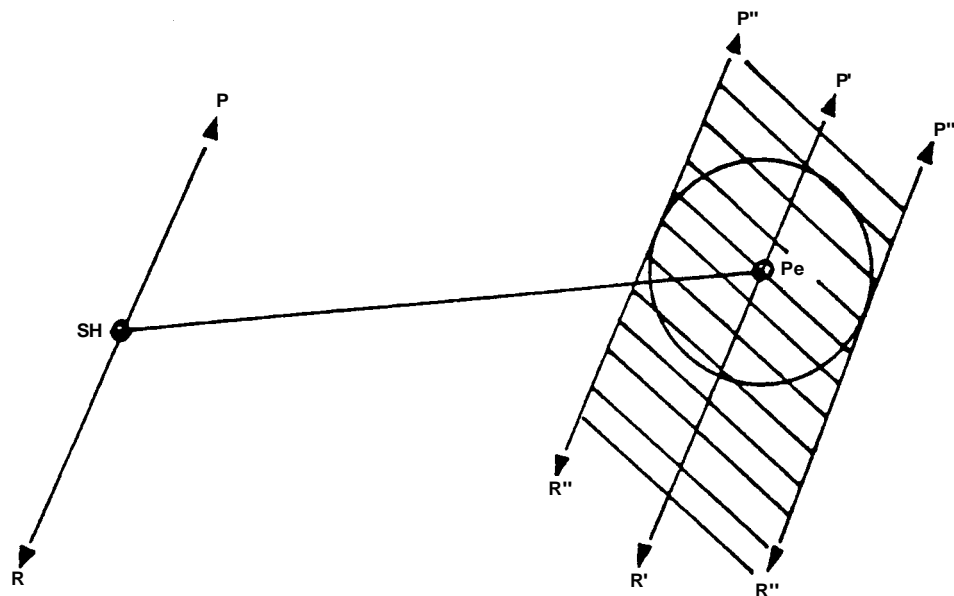
Como vimos, para as condições mais desfavoráveis de φ , t_1 e δ (que tornam máximo o valor da separação x), verifica-se que pode-se afastar cerca de 100 milhas para cada lado do ponto de tangência para alturas da ordem de 35° ; $50'$ para alturas de 70° ; $30'$ para alturas de 80° (raramente medidas em Navegação Astronômica), mantendo o valor da separação x entre a tangente e a circunferência oscultriz igual ou menor que 1 milha.

g. Erro do Transporte da Reta

Os erros inerentes ao transporte de uma **reta de altura** foram estudados no corpo do Capítulo 29.

Como vimos, quando não se conhecem os elementos da corrente ou os efeitos dos outros fatores que podem afetar a navegação estimada no intervalo de tempo referente ao transporte da LDP, constitui boa norma traçar o **círculo de incerteza da estima**, com centro na posição estimada e com raio igual a $\frac{1}{16}$ da distância estimada (SH-Pe), para boas condições de tempo e de mar, e $\frac{1}{8}$ da referida distância, em caso contrário. Paralelamente à reta transportada R'P' traçam-se as duas retas tangentes à circunferência de incerteza; essas retas limitam uma faixa, tracejada na figura 29A.9, que é uma **zona de incerteza** da posição do navio.

Figura 29A.9 -



2. SUMÁRIO E CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ERROS

Foram estudados os erros cometidos nas alturas observadas e em suas correções; os erros no traçado da reta de posição; e os erros introduzidos pelo método de cálculo da diferença de alturas (ou seja, da altura calculada, estimada ou assumida).

Do que foi visto, conclui-se que só têm efeito prático os seguintes erros:

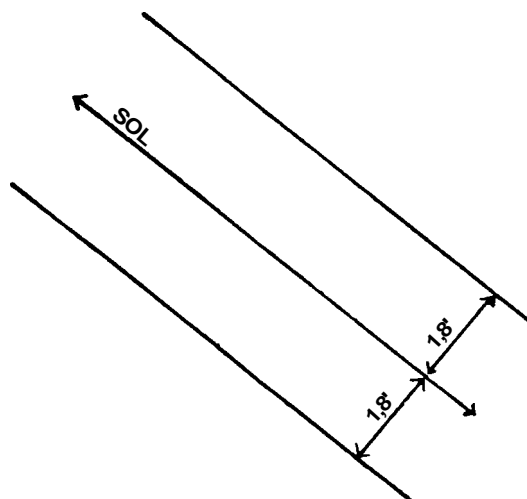
- Erro da altura observada;
- erro da altura estimada; e
- erro do transporte da reta, quando se tratar de uma reta de posição transportada.

Devido a todos esses erros, a reta de altura pode estar deslocada em relação à sua real posição. Ela, então, deve ser representada como uma faixa, cuja largura será o erro e na qual o navio estará. A tabela abaixo fornece a largura de tal faixa, baseada em dados teóricos e práticos:

Probabilidade de encontrar-se o navio	68,3%	90%	95%	99%
Média para o Sol	± 0,7'	± 1,1'	± 1,4'	± 1,8'
Média para estrelas e planetas	± 1,0'	± 1,6'	± 2,0'	± 2,5'

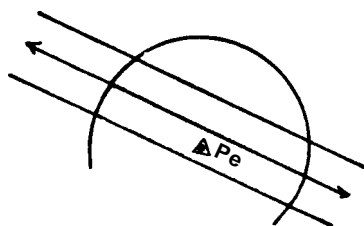
Isso significa que, numa observação isolada do Sol, tomamos como eixo a reta de posição e deslocamo-la de 1,8' para cada lado. O navio terá a probabilidade de 99% de estar dentro dessa faixa (ver a figura 29A.10).

Figura 29A.10 - Faixa de Erro em Reta do Sol (99% de Probabilidade de Estar na Faixa)



Mas essa faixa de erro pode ser limitada pelo **círculo de incerteza da estima**. Tendo que estar no círculo e na faixa, o navio estará, logicamente, dentro da área de superposição das duas figuras, como ilustrado na figura 29A.11. Por segurança, o navegante deve tomar como ponto de partida para traçado do rumo, a interseção da zona de incerteza com o círculo da estima que coloque o navio em pior situação, no que concerne à segurança da navegação.

Figura 29A.11 - Faixa de Erro Limitada pelo Círculo de Incerteza da Estima



Devemos considerar que os dados da tabela da página anterior são para condições normais de observação, admitindo-se, ainda, que os cálculos dos elementos determinativos da reta de altura foram feitos com cuidado, utilizando tábuas de confiança, como a PUB.229 ou a Radler de Aquino, ou calculadora eletrônica de navegação.

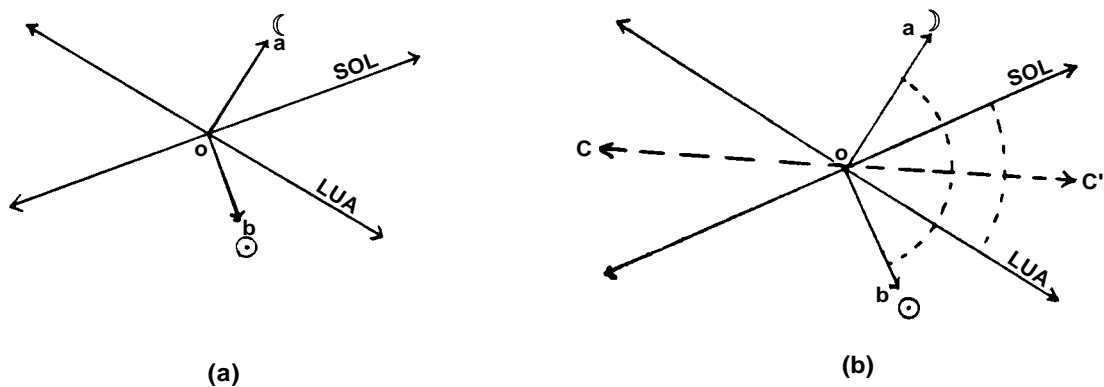
Em condições anormais, só o próprio observador poderá julgar o peso da reta de altura e, assim, determinar um valor para a faixa de erro. Aí é que a experiência do navegante se faz sentir.

3. BISSETRIZ DE ALTURA

Denomina-se **bissetriz de altura** (bissetriz de Aléssio ou bissetriz de posição) à bissetriz do ângulo formado pelas direções azimutais de dois astros, no ponto de corte (interseção) de duas retas de altura.

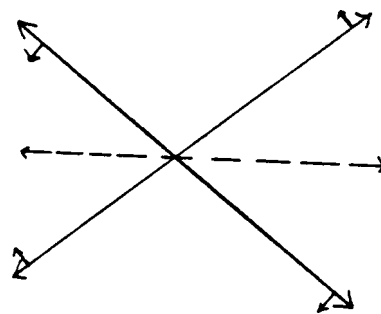
Na figura 29A.12 (a), **oa** é a direção azimutal da Lua e **ob** é a direção azimutal do Sol. O ângulo das direções azimutais é \widehat{aob} . A **bissetriz de altura**, então, é a bissetriz do ângulo \widehat{aob} , como mostrado na figura 29A.12 (b).

Figura 29A.12 - Bissetriz de Altura



Demonstra-se que a **bissetriz de altura** também é a bissetriz do ângulo formado pelas retas. Podem ser colocadas setas nas extremidades das retas indicando as direções azimutais, para facilitar o desenho da bissetriz (ver a figura 29A.13).

Figura 29A.13 -

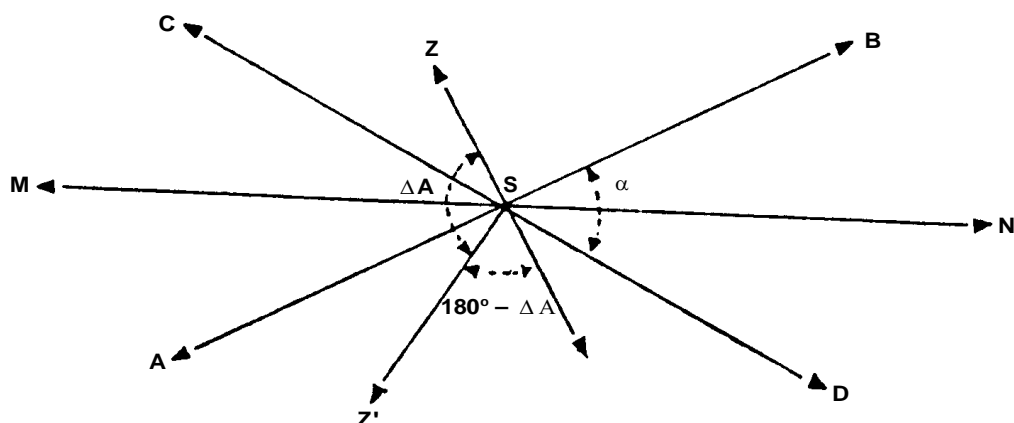


Assim, a **bissetriz de altura** é a reta bissetriz do ângulo entre duas retas de altura, cujo valor é de $180^\circ - \Delta A$, sendo ΔA a diferença de Azimute entre os dois astros.

Na figura 29A.14, **AB** e **CD** são duas retas de altura; **SZ** e **SZ'** são as direções azimutais dos dois astros; **MN** é a **bissetriz de altura** e α o ângulo entre as duas retas. Tem-se, então, $\alpha = 180^\circ - \Delta A$.

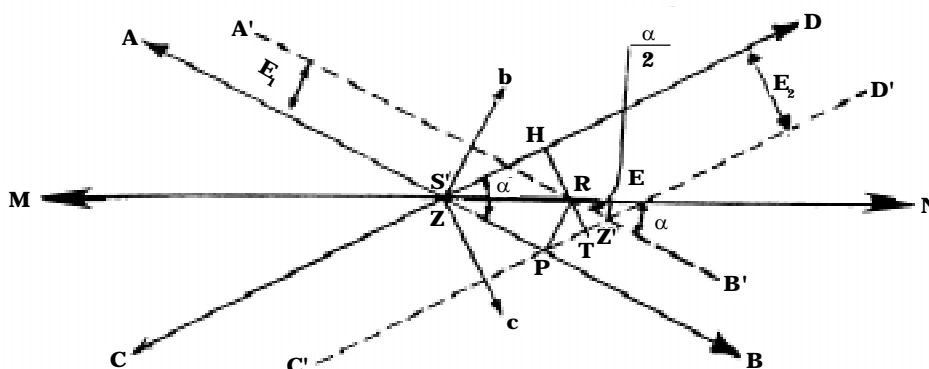
A **bissetriz de altura** goza de uma propriedade muito importante: é uma reta independente do **erro sistemático**.

Figura 29A.14 -



Suponha-se, na figura 29A.15, duas retas de altura **AB** e **CD**. Sejam **Sb** e **Sc** os Azimutes dos dois astros, α o ângulo de interseção das duas retas e **MN** a bissetriz.

Figura 29A.15 - Erro na Bissetriz de Altura



Imagine-se que as duas retas estejam erradas de E_1 e E_2 e que $A'B'$ e $C'D'$ sejam as duas retas sem erro. A posição do navio será, por consequência, Z' , e não Z . Segue, então, o cálculo da distância $Z'E$, que dará o erro da bissetriz.

Do triângulo $Z'RE$ obtemos: $Z'E = Z'R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$;

mas,
$$Z'R = \frac{RT}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{HT - HR}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{HT - RP}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{E_1 - E_2}{\operatorname{sen} \alpha} .$$

Substituindo este valor de $Z'R$ na expressão que nos dá $Z'E$, teremos que:

$$Z'E = \frac{E_1 - E_2}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} ;$$

$$Z'E = \frac{E_1 - E_2}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

Como $\alpha = 180^\circ - \Delta A$, $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\Delta A}{2}$ e, portanto,

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen} \frac{\Delta A}{2}$$

$$\text{Então:} \quad Z'E = \frac{E_1 - E_2}{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta A}{2}}$$

Daí, conclui-se que o erro da bissetriz será mínimo quando $60^\circ < \Delta A < 180^\circ$, posto que, quando $\Delta A = 60^\circ$, $Z'E = E_1 - E_2$ e, quando $\Delta A = 180^\circ$, $Z'E = \frac{E_1 - E_2}{2}$.

Neste último caso, chama-se a esta bissetriz de **bissetriz ótima**.

Podemos decompor o erro na reta de altura E em duas parcelas $E = S + X$, onde S é o erro sistemático e X o erro acidental. O erro sistemático poderá ser devido a um erro instrumental mal determinado, a uma depressão anormal do horizonte ou à equação pessoal do observador.

$$\text{Substituindo na fórmula } Z'E = \frac{E_1 - E_2}{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta A}{2}}, \text{ } E_1 - E_2 \text{ por } (S + X_1) - (S + X_2),$$

teremos que $Z'E = \frac{X_1 - X_2}{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta A}{2}}$, porquanto o erro sistemático é igual, já que as obser-

vações foram simultâneas, ou quase. Por conseqüência, a bissetriz só sofreu influência dos erros acidentais, como queríamos demonstrar.

Assim, a **bissetriz de altura** representa o lugar geométrico das posições do navio (oriundas do cruzamento de duas retas de altura), isenta dos erros sistemáticos.

Para se traçar, na prática a **bissetriz de altura**, traçam-se, no ponto de encontro de duas retas de altura, duas setas nas direções dos Azimutes respectivos.

A **bissetriz de altura** será, então, a bissetriz do ângulo formado pelas duas setas.

LIMITES DAS BISSETRIZES

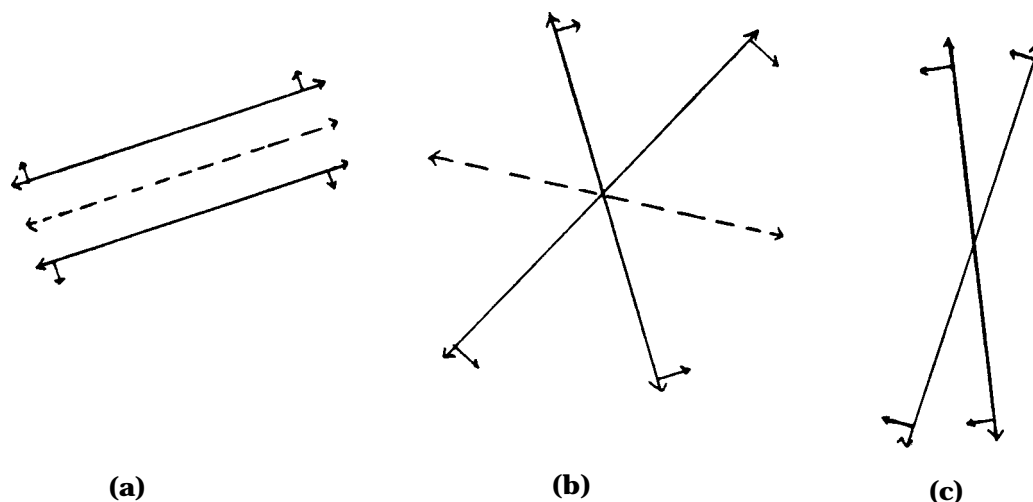
As bissetrizes não podem ser traçadas para quaisquer ângulos formados pelas direções azimutais. O melhor ângulo é quando a diferença entre os Azimutes é 180° . O menor ângulo possível é 60° .

Não se traça bissetriz quando o ângulo formado pelas direções azimutais for menor que 60° , pois, embora ela elimine os erros sistemáticos, aumentarão os erros acidentais.

Na figura 29A.16, tem-se:

- Em (a) bissetriz ótima: diferença azimutal = 180°
- Em (b) bissetriz limite: diferença azimutal = 60°
- Em (c) não se traça bissetriz: diferença azimutal $< 60^\circ$

Figura 29A.16 - Limites da Bissetriz de Altura



4. PONTO POR BISSETRIZES. CÍRCULO DE ERRO

Tendo-se duas retas de posição, não se consegue um ponto por bissetrizes e sim uma bissetriz, que é o lugar geométrico das posições do navio isentas dos erros sistemáticos e minimizadas dos erros acidentais. Se tivermos três retas ou mais, podemos então obter um ponto por bissetrizes, conforme visto no corpo do Capítulo 29.

Num ponto por três retas eliminam-se os erros sistemáticos aplicando-se as bissetrizes. Para os erros acidentais, traça-se o “círculo de erros”. Esse círculo tem centro no ponto por bissetrizes e raio igual a uma vez e meia a média dos erros acidentais. Lembramos que a experiência demonstra que o erro acidental médio numa reta do Sol é de 0,8' e numa reta de estrela, planeta ou Lua é de 1,0'. Assim, num ponto Sol-Lua-Vênus, a média seria 0,9' e o raio do círculo = $1,5 \times 0,9 = 1,4$ milha.

Para um ponto por três estrelas, teríamos o raio do círculo = $1,5 \times 1 = 1,5$ milha.

Para quatro retas procede-se da mesma maneira. Determina-se o ponto por bissetrizes e traça-se o **círculo de erro**, que terá como raio o erro acidental médio, ou, se as observações não forem boas, 1,2 vez o erro acidental médio.

Na prática, o navegante geralmente considera o navio no centro da figura formada pelas retas de altura, ou na interseção das bissetrizes, se for o caso. E é desse ponto que traça o rumo.